NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÀRO

Sur la droite de Simson

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 257-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__257_0>

SUR LA DROITE DE SIMSON [1];

PAR M. ERNEST CESARO.

Construisons, pour un système de trois masses égales à l'unité, appliquées aux sommets d'un triangle, le centre de gravité G et les axes principaux d'inertie qui y passent. Appelons $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ les coordonnées des sommets du triangle, par rapport à ces axes. On a

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_3}{x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_2} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_3} = p, \\[2ex] \dfrac{x_2 - x_3}{y_1} = \dfrac{x_3 - x_1}{y_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{y_3} = -q, \end{cases}$$

p et q étant des constantes. Pour que les dernières égalités soient compatibles entre elles, il faut et il suffit que l'on ait $pq = 3$. Il est, d'ailleurs, facile de déterminer les valeurs de ces constantes, connaissant l'aire T du triangle et les moments d'inertie principaux, A et B. On a, en effet,

$$2T = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

ou bien, en vertu de (2),

$$2T = p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = q(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2);$$

[1] C'est par une interversion de mise en pages que cet article suit, au lieu de les précéder, les *Remarques sur la géométrie du triangle*.

d'où

(3) $$p = \frac{2T}{A}, \qquad q = \frac{2T}{B}.$$

Incidemment, nous ferons remarquer qu'il est aisé de calculer A et B en fonction des côtés c_1, c_2, c_3 du triangle.

On a d'abord, d'après (3) et à cause de la condition $pq = 3$,

$$3AB = 4T^2\ (^1).$$

D'autre part, le moment polaire A + B est égal aux $\frac{4}{9}$ de la somme des carrés des médianes, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ de la somme des carrés des côtés (²). Par suite, les valeurs de A et B sont comprises dans l'expression

$$\frac{1}{6}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \pm \frac{1}{3}\sqrt{c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 - c_2^2 c_3^2 - c_3^2 c_1^2 - c_1^2 c_2^2}.$$

On en déduit, par exemple, que la distance des deux points, pour lesquels l'ellipse d'inertie se réduit à un cercle, est

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}(c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 - c_2^2 c_3^2 - c_3^2 c_1^2 - c_1^2 c_2^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Cette distance ne devient nulle que dans le cas du triangle équilatéral.

Les coordonnées spéciales, que nous employons ici, jouissent d'une foule de propriétés intéressantes, et, grâce aux formules (1) et (2), elles se prêtent avanta-

---

(¹) Le coefficient 3 doit être remplacé par $\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}$, dans le cas de trois masses quelconques, m_1, m_2, m_3.

(²) Il est *nécessaire* que les masses soient égales entre elles, si l'on veut que le moment polaire soit proportionnel à la somme des carrés des côtés.

geusement à l'étude des faits géométriques du triangle ([1]). En vue des développements ultérieurs, nous allons chercher les coordonnées α, β du centre du cercle circonscrit au triangle considéré. On a

$$\begin{aligned}(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 &= (\alpha - x_2)^2 + (\beta - y_2)^2 \\ &= (\alpha - x_3)^2 + (\beta - y_3)^2;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en ayant égard aux relations (1) et (2),

$$\frac{\alpha}{p x_1} - \frac{\beta}{q y_1} = \frac{\alpha}{p x_2} - \frac{\beta}{q y_2} = \frac{\alpha}{p x_3} - \frac{\beta}{q y_3} = \frac{p-q}{6};$$

puis

$$\alpha = \frac{3(A-B)}{2A^2} x_1 x_2 x_3, \qquad \beta = -\frac{3(A-B)}{2B^2} y_1 y_2 y_3.$$

En tenant compte de ces expressions, on trouve facilement les formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum x_1^3 = \frac{2A^2\alpha}{A-B}, \qquad &\sum x_1^2 y_1 = \frac{2AB\beta}{A-B}, \\ &\sum y_1^3 = -\frac{2B^2\beta}{A-B}, \qquad &\sum x_1 y_1^2 = -\frac{2AB\alpha}{A-B}, \end{aligned}\right.$$

qui nous seront utiles plus loin.

Cela étant, prenons pour axe des abscisses une droite quelconque, D. Soit η sa distance à G, et faisons passer

---

([1]) Nous espérons en faire des applications à la Géométrie *récente* du triangle. Il est peut-être utile de faire observer que, si u_1, u_2, u_3 sont les distances d'un point quelconque aux côtés du triangle, les coordonnées x et y du même point sont données par les équations

$$x = \frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3}, \qquad y = \frac{u_1 y_1}{h_1} + \frac{u_2 y_2}{h_2} + \frac{u_3 y_3}{h_3},$$

où h_1, h_2, h_3 sont les hauteurs du triangle. Inversement

$$\frac{u_1}{h_1} = \frac{x x_1}{A} + \frac{y y_1}{B} + \frac{1}{3}.$$

par ce point l'axe des ordonnées. Les coordonnées d'un point quelconque, par rapport aux nouveaux axes, seront représentées par a et $b+\eta$, si l'on pose

$$(5)\qquad a = x\cos\theta - y\sin\theta,\qquad b = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

θ étant l'angle de D avec l'ancien axe des abscisses. Pour exprimer que D est une *droite de Simson,* relativement au triangle donné, il faut, par les points où D rencontre les côtés du triangle, élever les perpendiculaires à ces droites et exprimer qu'elles concourent en un même point. Par un calcul très simple, on parvient à la condition

$$(6)\qquad \begin{cases} -\eta\sum(a_2-a_3)^2(b_3-b_1)(b_1-b_2) \\ \quad = \sum(a_2b_3-a_3b_2)(a_2-a_3)(b_3-b_1)(b_1-b_2), \end{cases}$$

qui donne la valeur de η. Or on trouve sans peine

$$-\sum(a_2-a_3)^2(b_3-b_1)(b_1-b_2)$$
$$= 2\mathrm{T}\sum a_1(b_2-b_3) = 4\mathrm{T}^2.$$

On simplifie, de même, le second membre de (6), en tenant compte des égalités évidentes

$$a_2b_3-a_3b_2 = a_3b_1-a_1b_3 = a_1b_2-a_2b_1 = \tfrac{2}{3}\mathrm{T}.$$

et la condition (6) devient

$$(7)\qquad 6\mathrm{T}\eta = \sum(a_2-a_3)(b_3-b_1)(b_1-b_2).$$

Nous allons faire retour aux anciennes coordonnées, afin de mettre en évidence, dans le second membre de (7), la variable θ. Avant de faire usage des formules (5), remarquons que, en vertu de (1), on a

$$x_1^2 - x_2x_3 = \frac{\mathrm{A}}{2},\qquad y_1^2 - y_2y_3 = \frac{\mathrm{B}}{2},\qquad x_2y_3 + x_3y_2 = 2x_1y_1,$$

et, par suite,

$$(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = \frac{A}{2} - 3x_1^2,$$

$$(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) = \frac{B}{2} - 3y_1^2,$$

$$(x_3 - x_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_1) = -6x_1y_1.$$

L'emploi des formules (5) donne donc

$$\begin{aligned}(b_3 - b_1)(b_1 - b_2)\\ = \tfrac{1}{2}(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta) - 3(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2;\end{aligned}$$

puis, par substitution dans (7) et en observant (2),

$$2T\eta = \sum(px_1\sin\theta + qy_1\cos\theta)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2.$$

Si l'on développe le second membre, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{A-B}{2}\eta = A\alpha\sin^3\theta + (A+2B)\beta\sin^2\theta\cos\theta\\ -(2A+B)\alpha\sin\theta\cos^2\theta - B\beta\cos^3\theta,\end{aligned}$$

pourvu que l'on ait égard aux formules (3) et (4). On peut écrire, plus simplement,

$$(8) \qquad \eta = \tfrac{1}{2}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - R\cos(3\theta - \varphi),$$

après avoir posé, pour abréger,

$$\frac{3A+B}{A-B}\alpha = 2R\sin\varphi, \qquad \frac{A+3B}{A-B}\beta = 2R\cos\varphi,$$

où R et φ sont des *constantes*.

Remarquons, en général, que, si l'on détermine une droite par sa distance η à un *point fixe*, et par θ l'angle qu'elle fait avec une *direction fixe*, les droites qui satisfont à l'équation

$$(9) \qquad \eta = F(\theta)$$

enveloppent une certaine courbe, dont il est facile d'obtenir l'équation intrinsèque. Si, en effet, ξ et η sont les coordonnées variables du point fixe, par rapport à la tangente et à la normale à la courbe, on sait que

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta - \rho}{\rho}, \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{\rho}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho},$$

et, par suite, la dérivation de l'équation (9) donne

$$\xi = F'(\theta):$$

puis, par une nouvelle dérivation,

$$\rho = F(\theta) + F''(\theta).$$

Enfin, si l'on multiplie par $d\theta$ les membres de cette équation, et que l'on intègre, on obtient

$$-s = \int F(\theta)\,d\theta + F'(\theta).$$

L'élimination de θ entre les expressions de ρ et de s conduit à l'équation intrinsèque demandée.

Si l'on applique les calculs précédents à l'équation (8), on trouve d'abord

$$\xi = -\tfrac{1}{2}(\beta \sin\theta - \alpha \cos\theta) + 3R \sin(3\theta - \varphi);$$

puis, successivement,

$$\rho = 8R \cos(3\theta - \varphi), \qquad 3s = -8R \sin(3\theta - \varphi).$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$\rho^2 + 9s^2 = 64R^2.$$

L'enveloppe de D est donc une hypocycloïde à trois rebroussements : c'est l'*hypocycloïde de Ferrers* (¹).

Si l'on combine entre elles les formules qui précè-

(¹) Aux nombreuses recherches sur cette ligne remarquable, il faut ajouter une *Étude géométrique*, publiée récemment par M. Carmelo Intrigila, dans le *Journal de Battaglini* (1885, p. 263-284).

dent, on voit que l'on peut écrire

$$\rho = 4(\eta_0 - 3\eta), \qquad s = \tfrac{4}{9}(\xi_0 - 3\xi),$$

ξ_0 et η_0 étant les coordonnées du centre du cercle circonscrit, relativement à la tangente et à la normale à l'hypocycloïde. Or, d'après un théorème connu, on sait que les coordonnées de l'orthocentre sont $3\xi - 2\xi_0$, $3\eta - 2\eta_0$. Conséquemment (¹), le centre du cercle directeur de l'hypocycloïde de Ferrers est au milieu de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs au centre du cercle circonscrit. Les distances du point en question à la tangente et à la normale à la courbe, en un point quelconque, représentent respectivement, en valeur absolue, la huitième partie du rayon de courbure au point considéré, et les $\frac{9}{8}$ de l'arc qui sépare ce point du sommet voisin. Il est presque inutile d'ajouter que la courbe dont il s'agit est la trajectoire d'un point d'une circonférence, de rayon R, roulant, sans glisser, à l'intérieur d'une circonférence de rayon 3R : cela résulte de la simple inspection de l'équation intrinsèque trouvée (²).

Examinons, maintenant, le cas plus général de trois droites concourantes, qui rencontrent les côtés d'un triangle sous le même angle ω. On sait que les trois points de rencontre sont sur une droite D_ω. En opérant

---

(¹) On sait que, en général, les coordonnées du centre du cercle directeur de la courbe cycloïdale $a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2$ sont $\dfrac{b^2 s}{a^2 - b^2}$, $\dfrac{a^2 \rho}{a^2 - b^2}$.

(²) Il faut se rappeler que, pour la ligne $a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2$, le rayon du cercle générateur est $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{ab}{a+b}$; celui du cercle directeur est $\dfrac{ab^2}{a^2 - b^2}$.

comme précédemment, on trouve, au lieu de (7),

$$6T\eta = \sum (a_2 - a_3)(b_3 - b_1)(b_1 - b_2) + 3(b_2 - b_3)(b_3 - b_1)(b_1 - b_2)\cot\omega\,;$$

puis, après quelques transformations et par dérivations successives,

$$\begin{aligned}
\eta &= \tfrac{1}{2}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - R\cos(3\theta - \varphi) \\
&\quad + [\tfrac{3}{2}(\beta\sin\theta - \alpha\cos\theta) - R\sin(3\theta - \varphi)]\cot\omega, \\
\xi &= -\tfrac{1}{2}(\beta\sin\theta - \alpha\cos\theta) + 3R\sin(3\theta - \varphi) \\
&\quad + [\tfrac{3}{2}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - 3R\cos(3\theta - \varphi)]\cot\omega, \\
\rho &= \frac{8R}{\sin\omega}\sin(3\theta + \omega - \varphi).
\end{aligned}$$

Enfin, par intégration,

$$3s = \frac{8R}{\sin\omega}\cos(3\theta + \omega - \varphi).$$

Si l'on élimine θ, on obtient

$$\rho^2 + 9s^2 = \frac{64R^2}{\sin^2\omega}.$$

L'enveloppe de D_ω est donc une hypocycloïde semblable à la courbe de Ferrers : elle est engendrée par un point d'une circonférence, de rayon $\frac{R}{\sin\omega}$, roulant, sans glisser, à l'intérieur d'une circonférence trois fois plus grande.

Rapportons tout à la droite D, ou droite de Simson proprement dite, prise comme axe des abscisses, l'origine étant placée au point M, où elle touche son enveloppe. Si l'on compare entre elles les formules obtenues pour la droite de Simson *généralisée*, on voit que les coordonnées du point où cette droite, parallèle à D, touche son enveloppe, sont

$$(10)\qquad 3\eta\cot\omega,\quad \tfrac{1}{3}(4\xi_0 \quad 3\xi)\cot\omega,$$

et que les coordonnées intrinsèques de l'enveloppe en question sont

$$(11) \qquad \rho - 3s\cot\omega, \quad s + \tfrac{1}{3}\rho\cot\omega.$$

Divisant l'une par l'autre les expressions (10), on voit immédiatement que les points de contact des droites de Simson généralisés, de même direction, sont sur une droite Δ_θ. Si l'on applique à cette droite les méthodes habituelles de la Géométrie intrinsèque, on trouve que, lorsque θ varie, Δ_θ touche son enveloppe en un point P, dont les coordonnées sont

$$-\frac{\rho}{s}\eta, \quad \rho + \frac{\rho}{s}\xi.$$

En partant de ces expressions, il serait aisé de chercher l'équation intrinsèque de la ligne (P), enveloppe des droites Δ.

Nous allons signaler une importante propriété de la ligne (P). On démontre facilement que les centres de courbure de toutes les hypercycloïdes sont, pour chaque valeur de θ, sur une perpendiculaire à MG, qui rencontre Δ_θ au point P. Il en résulte qu'en ce point il y a rebroussement pour une certaine hypocycloïde. Du reste, d'après les expressions (11), on voit que, pour chaque valeur de θ, deux valeurs de ω, qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$, déterminent respectivement un *point* de *rebroussement* et un *sommet* de deux hypocycloïdes particulières. Le point de rebroussement correspond évidemment à la valeur

$$\cot\omega = \frac{\rho}{3s};$$

en la substituant dans les expressions (10), on voit que les coordonnées du point cherché sont précisément les coordonnées de P. Ainsi, les points de rebroussement de toutes les hypocycloïdes considérées sont sur la ligne (P). La valeur que nous avons trouvée pour ω montre, en outre, que l'angle $\omega + 3\theta$ est constant, ce qui pourrait donner lieu à d'autres considérations; mais nous ne nous y arrêterons pas. On traiterait, par les mêmes formules, un grand nombre d'autres questions intéressantes. Nous nous contenterons de faire remarquer, pour finir, que les centres des cercles directeurs de toutes les hypocycloïdes sont situés sur une droite : ils sont, en effet, également éloignés du centre du cercle circonscrit et du point de rencontre des hauteurs ([1]).