

CH. BIEHLER

Sur l'abaissement des équations réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 251-256

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__251_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. On sait que, si l'équation $F(x) = 0$ est réciproque et n'admet pas les racines -1 et $+1$, si l'on fait la

substitution

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

l'équation en y ne renferme plus que des puissances paires de y et, en posant $y^2 = z$, la résolution de l'équation $F(x) = 0$ est ramenée à celle d'une équation de degré sous-double. A deux valeurs de x , $x = a$, $x = \frac{1}{a}$, réciproques, correspondent, en effet, des valeurs de y égales et de signes contraires.

Nous allons nous proposer de chercher la forme générale des fonctions rationnelles

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

qui jouissent de la même propriété que la fonction $\frac{1-x}{1+x}$.

Soit

$$y = \frac{A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m}{B_0 + B_1x + \dots + B_px^p}$$

la fonction cherchée ; on doit avoir

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m}{x^{m-p}(B_0x^p + B_1x^{p-1} + \dots + B_p)} \\ &= -\frac{A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m}{B_0 + B_1x + \dots + B_px^p}. \end{aligned}$$

Pour que l'identité soit possible entre les deux membres, il faut que $m = p$. Par suite,

$$\begin{aligned} & \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m}{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m} \\ &= -\frac{A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots + A_0}{B_mx^m + \dots + B_0}. \end{aligned}$$

Pour que ces fractions soient égales, il faut que les termes de même degré des numérateurs et des dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant.

On a donc

$$\left. \begin{array}{l} A_0 = \lambda A_m, \\ A_1 = \lambda A_{m-1}, \\ \dots\dots\dots, \\ A_m = \lambda A_0, \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} B_0 = -\lambda B_m, \\ B_1 = -\lambda B_{m-1}, \\ \dots\dots\dots, \\ B_m = -\lambda B_0. \end{array} \right.$$

Ces égalités donnent

$$A_0 A_m = \lambda^2 A_0 A_m,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 1, \\ \lambda &= \pm 1. \end{aligned}$$

Prenons $\lambda = 1$, on aura

$$\begin{array}{ll} A_0 = A_m, & B_0 = -B_m, \\ A_1 = A_{m-1}, & B_1 = -B_{m-1}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

Distinguons les cas de m pair et impair :

Si m est pair et égal à $2n$, le numérateur devient

$$A_0(x^{2n} + 1) + A_1(x^{2n-1} + x) + \dots + A_n x^n,$$

il est réciproque.

Quant au dénominateur, il devient

$$B_0(x^{2n} - 1) + B_1(x^{2n-1} - x) + \dots + B_{n-1}(x^{n+1} - x^{n-1});$$

il renferme le facteur $x^2 - 1$ et peut s'écrire

$$(1 - x^2)\psi_{2n-2}(x),$$

$\psi_{2n-2}(x)$ étant un polynôme réciproque de degré pair ;
par suite,

$$y = \frac{\varphi_{2n}(x)}{(1 - x^2)\psi_{2n-2}(x)}$$

ou bien

$$y = \frac{1 + r}{1 - x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{(1 + x)^2 \psi_{2n-2}(x)}$$

(254)

ou enfin

$$y = \frac{1+x}{1-x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

$\varphi_{2n}(x)$ et $\psi_{2n}(x)$ étant des polynômes réciproques de degré pair $2n$.

Si m est impair, $m = 2n + 1$; le numérateur devient

$$A_0(x^{2n+1} + 1) + A_1(x^{2n} + x) + \dots + A_n(x^{n+1} + x^{n-1});$$

ce polynôme renferme $x + 1$ en facteur; on peut l'écrire

$$(x + 1)\varphi_{2n}(x),$$

$\varphi_{2n}(x)$ étant un polynôme de degré pair et réciproque; le dénominateur devient dans ce cas

$$B_0(x^{2n+1} - 1) + B_1(x^{2n} - x) + \dots + B_n(x^{n+1} - x^n).$$

C'est le produit de $1 - x$ par un polynôme $\psi_{2n}(x)$ réciproque et de degré pair; on a donc

$$y = \frac{1-x}{1+x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)}.$$

La forme trouvée dans le cas de m pair, à savoir

$$y = \frac{1+x}{1-x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

se ramène immédiatement à cette dernière, car on peut l'écrire

$$\frac{1+x}{1-x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)} = \frac{1-x}{1+x} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)};$$

les polynômes $(1+x)^2$, $(1-x)^2$ sont réciproques et de degré pair.

En prenant $\lambda = -1$, on arrive évidemment aux mêmes résultats.

On peut donc dire que la forme la plus générale de la fonction rationnelle qui jouit des mêmes propriétés que la substitution

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

est

$$y = \frac{1-x}{1+x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

$\varphi_{2n}(x)$ et $\psi_{2n}(x)$ étant des polynômes réciproques et de degré pair.

2. On sait aussi qu'on ramène la résolution de l'équation réciproque de degré pair à celle d'une équation de degré sous-double, en faisant la substitution

$$z = \Theta\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

la fonction Θ étant symétrique en x et $\frac{1}{x}$ et rationnelle.

Mais une telle fonction est le quotient de deux fonctions entières et symétriques en x et $\frac{1}{x}$; chacune de ces fonctions symétriques est une fonction entière de la somme et du produit des quantités x et $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire une fonction de $x + \frac{1}{x}$ seulement.

La forme générale de la fonction $\Theta\left(x, \frac{1}{x}\right)$ symétrique en x et $\frac{1}{x}$ est donc

$$z = \frac{G\left(x + \frac{1}{x}\right)}{H\left(x + \frac{1}{x}\right)},$$

G et H étant des fonctions entières quelconques. La plus simple de ces substitutions est évidemment celle dont on fait habituellement usage, à savoir

$$z = x + \frac{1}{x}.$$

Dans la question précédente, l'équation en y^2 ayant été obtenue, on l'abaisse au degré sous double en posant $y^2 = z$; or la forme générale de y est

$$y = \frac{1-x}{1+x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

d'où

$$z = \frac{(1-x)^2 \varphi_{2n}^2(x)}{(1+x)^2 \psi_{2n}^2(x)}.$$

Mais la fonction $\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$ peut s'écrire

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{x + \frac{1}{x} + 2}.$$

D'autre part, un polynôme $f(x)$ symétrique, de degré 2μ , peut s'écrire

$$f(x) = x^\mu \left[A_0 \left(x^\mu + \frac{1}{x^\mu} \right) + \dots \right],$$

et l'on sait que tous les termes de la forme $x^\mu + \frac{1}{x^\mu}$ sont des fonctions rationnelles de $x + \frac{1}{x}$; la valeur de z peut donc s'écrire

$$z = \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{x + \frac{1}{x} + 2} \frac{G_1 \left(x + \frac{1}{x} \right)}{H_1 \left(x + \frac{1}{x} \right)}.$$

Cette forme rentre donc dans la forme

$$z = \frac{G \left(x + \frac{1}{x} \right)}{H \left(x + \frac{1}{x} \right)}.$$

On voit donc que les deux substitutions que l'on emploie dans la résolution des équations réciproques, à savoir $y = \frac{1-x}{1+x}$, $z = y^2$ et $z = x + \frac{1}{x}$, rentrent, ainsi que les formes les plus générales de ces substitutions, dans un type unique

$$z = \frac{G \left(x + \frac{1}{x} \right)}{H \left(x + \frac{1}{x} \right)},$$

G et H étant des fonctions entières.