

GENTY

**Note sur la courbure des sections  
normales d'une surface**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 6  
(1887), p. 24-29

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1887\\_3\\_6\\_24\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6_24_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



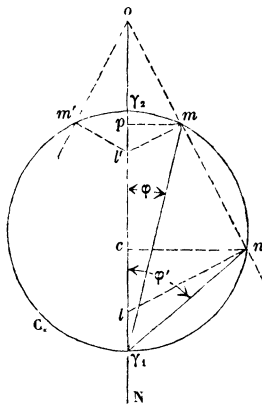
---

**NOTE SUR LA COURBURE DES SECTIONS NORMALES  
D'UNE SURFACE;**

PAR M. GENTY.

---

1. Soient  $N$  la normale en un point  $o$  d'une surface;  
 $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les centres de courbure principaux pour ce



point : on demande le centre de courbure de la section normale qui fait un angle  $\varphi$  avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ .

Soit C le cercle décrit dans le plan de la figure sur  $\gamma_1 \gamma_2$  comme diamètre. Menons par le point  $\gamma_1$  une ligne faisant avec N l'angle  $\varphi$  et soit  $m$  le point où elle rencontre de nouveau C; soit  $n$  le second point de rencontre avec ce cercle de la ligne  $om$ ; la perpendiculaire élevée sur  $om$  au point  $n$  coupe N au centre de courbure cherché.

En effet, abaissons du point  $m$  une perpendiculaire  $mp$  sur N; on aura

$$op \cdot ol = om \cdot on = R_1 R_2,$$

$R_1$  et  $R_2$  désignant les rayons de courbure principaux.

Donc

$$\frac{1}{ol} = \frac{op}{R_1 R_2}.$$

Or on a

$$op = o\gamma_2 + \gamma_2 p = R_2 + (R_1 - R_2) \sin^2 \varphi = R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi.$$

Donc, enfin,

$$\frac{1}{ol} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2};$$

c'est la relation d'Euler.

2. Désignons par  $\varphi'$  l'angle  $\widehat{o\gamma_1 n}$ . On a

$$\text{tang } \varphi \text{ tang } \varphi' = \frac{o\gamma_2}{o\gamma_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Or la relation qui lie les angles  $\varphi$  et  $\varphi'$  correspondant à deux sections normales conjuguées est

$$\text{tang } \varphi \text{ tang } \varphi' = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Si donc  $m'$  est le point du cercle C symétrique du point  $m$  par rapport à N, la perpendiculaire élevée en  $m'$  sur la droite  $om'$  coupe N au centre de courbure  $l'$  de la section

normale conjuguée de celle que nous avons considérée en premier lieu. On obtient plus simplement le point  $l'$  en élevant au point  $m$  une perpendiculaire sur  $om$ . Donc :

*Les perpendiculaires élevées aux extrémités d'une corde du cercle C passant par le point  $o$  déterminent sur N les centres de courbure de deux sections normales conjuguées.*

On reconnaît sans difficulté que l'angle  $\widehat{con}$  est complémentaire de celui des deux sections normales conjuguées qui ont leurs centres de courbure aux points  $l$  et  $l'$  respectivement.

3. Le point  $n$  est celui que M. Mannheim appelle le *point représentatif* et M. Dewulf le *centre perspectif* de la normalie dont la directrice est une courbe tracée sur la surface à partir du point  $o$  et qui est tangente à la section normale dont le centre de courbure est en  $l$ . Le point central de cette normalie est le pied  $c$  de la perpendiculaire abaissée du point  $n$  sur N et le plan central de cette normalie fait avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est  $\gamma_1$  un angle égal à  $n\widehat{\gamma_1\gamma_2}$ , c'est-à-dire à  $\varphi'$ . En tenant compte du sens dans lequel doit être mesuré cet angle, on retrouve immédiatement ce théorème de M. Mannheim :

*La tangente en un point  $o$  de la directrice d'une normalie à une surface et la trace du plan central de cette normalie sur le plan tangent en  $o$  à la surface sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface au point  $o$ .*

4. La construction du n° 1 conduit à une démonstration très simple d'un théorème donné comme composition

en novembre 1885 aux examens de licence de la Faculté de Grenoble et dont voici l'énoncé :

*Soit S le lieu des centres de courbure des sections faites dans une surface par des plans passant par l'un de ses points  $o$  ; la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface S,  $o$  étant le pôle de la transformation et  $R_1 R_2$  son module, est un cylindroïde lieu des perpendiculaires communes à la normale en  $o$  et aux normales infiniment voisines.*

Considérons, en effet, les sections passant par une tangente  $ot$  de la surface donnée qui fait l'angle  $\varphi$  avec la trace de la section principale dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ . Le lieu des centres de courbure de ces sections est un cercle  $L$ , ayant  $ol$  pour diamètre et situé dans le plan normal perpendiculaire à  $ot$ .

Si nous rabattons ce cercle sur le plan de la figure en le faisant tourner autour de  $N$ , il se confondra avec le cercle construit sur  $ol$  comme diamètre et passera par le point  $n$ .

Mais on a

$$om \cdot on = R_1 R_2 ;$$

donc la droite  $L_1$  transformée de ce cercle dans l'inversion définie par l'énoncé est rabattue sur la droite  $np$ .

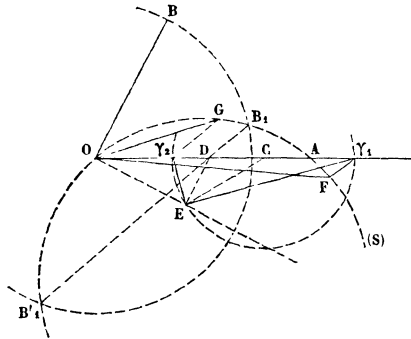
Or le point  $p$  est précisément le point central de la normalie dont le plan central est le plan du cercle  $L$  ; donc la droite  $L_1$  est perpendiculaire à la normale  $K$  au point central de cette normalie ; elle est par suite une perpendiculaire commune à la normale  $N$  et à une normale infiniment voisine de la surface donnée.

D'ailleurs les droites  $K$  sont les génératrices d'un cylindroïde  $P$  ; donc le lieu des droites  $L_1$  est aussi un cylindroïde, qu'on obtient en faisant tourner  $P$  de  $90^\circ$  autour de son axe  $N$ .

5. Nous remarquerons enfin que le théorème du n° 2 conduit à des constructions très simples, toutes les fois qu'il y a lieu d'appliquer en Géométrie descriptive le théorème des tangentes conjuguées, par exemple lorsqu'on cherche la tangente à la courbe d'ombre d'une surface.

On en déduit aussi sans difficulté la construction suivante pour la détermination des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués OA et OB.

Par les points O et A faisons passer un cercle (S) de rayon quelconque; du point O comme centre avec OB pour rayon, décrivons un cercle qui rencontre (S) aux points B<sub>1</sub> et B'<sub>1</sub>; menons la droite B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub> qui coupe OA



au point D. Élevons en O une perpendiculaire sur OB et du point D abaissons sur cette droite une perpendiculaire DE. Enfin, du point milieu C de la droite DA, avec un rayon égal à CE, décrivons une circonférence qui rencontre OA aux points  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Les axes cherchés sont parallèles aux droites  $E\gamma_1$  et  $E\gamma_2$  respectivement, et, si  $a$  et  $b$  sont les demi-axes, on a

$$a = \sqrt{OA \cdot O\gamma_1}, \quad b = \sqrt{OA \cdot O\gamma_2}.$$

Pour obtenir sur la figure les longueurs  $a$  et  $b$ , menons par les points  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des parallèles à  $B_1 B'_1$ , qui rencontrent le cercle  $\langle S \rangle$  aux points F et G respectivement ; on a

$$a = OF, \quad b = OG.$$