NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Remarques sur la géométrie du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 215-242

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__215_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

REMARQUES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

PAR M. E. CESARO.

1. *Coordonnées d'inertie.* — Soient $A_1 A_2 A_3$ un triangle scalène [1], σ son aire, G son barycentre, x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan, par rapport aux axes principaux d'inertie, issus de G. Ce sont les *coordonnées d'inertie* du point. En particulier, soient x_i

[1] Quelques-uns des résultats que nous allons obtenir sont en défaut dans le cas des triangles isoscèles : il serait facile d'examiner à par ce cas spécial.

et y_i les coordonnées de A_i. D'après un théorème connu ([1]), les moments et le produit d'inertie d'un triangle, relativement à deux axes orthogonaux de son plan, sont les mêmes que si l'on concentrait l'aire du triangle en trois masses égales, appliquées aux milieux des côtés; par conséquent, si a et b sont les demi-axes de l'ellipse centrale d'inertie, et si l'on observe que les coordonnées du milieu du côté opposé à A_i sont $-\frac{x_i}{2}$ et $-\frac{y_i}{2}$, on a

$$(1) \qquad \sum x_i^2 = 12a^2, \qquad \sum y_i^2 = 12b^2,$$

$$(2) \qquad \sum x_i y_i = 0,$$

i devant toujours varier entre 1 et 3. On a, en outre,

$$(3) \qquad \sum x_i = 0, \qquad \sum y_i = 0.$$

2. Cela posé, les relations (2) et (3) donnent immédiatement

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_3}{x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_2} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_3} = \dfrac{\sigma}{6a^2}, \\ \dfrac{x_2 - x_3}{y_1} = \dfrac{x_3 - x_1}{y_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{y_3} = -\dfrac{\sigma}{6b^2}, \end{cases}$$

pourvu que l'on tienne compte de (1) et de la formule connue

$$2\sigma = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

Pour que les égalités (4) soient compatibles entre elles,

([1]) Voir une *Question proposée* par M. G. Cesàro, professeur à Liège, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 401, et t. V, p. 29).

il faut que l'on ait

$$(5) \qquad \sigma = 6ab\sqrt{3}.$$

Enfin il ne serait pas difficile de démontrer, au moyen des relations qui précèdent, une foule d'autres égalités, plus ou moins intéressantes, ayant toutes quelque importance dans l'étude du triangle. On trouve, par exemple, les relations

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum x_i^3 = 3x_1x_2x_3, & \sum x_iy_i^2 = -\dfrac{3b^2}{a^2}x_1x_2x_3, \\ \sum y_i^3 = 3y_1y_2y_3, & \sum x_i^2y_i = -\dfrac{3a^2}{b^2}y_1y_2y_3, \end{array} \right.$$

que nous allons immédiatement employer dans une recherche particulière.

3. *Cercle circonscrit.* — Soient r, α, β le rayon et les coordonnées du centre du cercle circonscrit. On a

$$(7) \qquad r^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2.$$

Multiplions d'abord cette équation par x_i, puis par y_i. Faisons ensuite $i = 1, 2, 3$, successivement. Par addition et en ayant égard à (6), nous trouvons

$$(8) \qquad \alpha = \frac{a^2 - b^2}{8a^4}x_1x_2x_3, \qquad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{8b^4}y_1y_2y_3.$$

Dès lors, les formules (6) deviennent

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum x_i^3 = \dfrac{24a^4\alpha}{a^2 - b^2}, & \sum y_i^3 = -\dfrac{24b^4\beta}{a^2 - b^2}, \\ \sum x_i^2y_i = \dfrac{24a^2b^2\beta}{a^2 - b^2}, & \sum x_iy_i^2 = -\dfrac{24a^2b^2\alpha}{a^2 - b^2}. \end{array} \right.$$

Voici d'autres formules, qu'il serait facile de déduire de

(1), (2), (3) :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum x_i^4 = 72a^4, \qquad \sum y_i^4 = 72b^4,\\ &\sum x_i^2 y_i^2 = 24a^2b^2,\\ &\sum x_i^3 y_i = \sum x_i y_i^3 = 0. \end{aligned}\right.$$

L'addition des égalités (7) donne

$$(11)\qquad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4(a^2 + b^2).$$

Si, avant d'ajouter, on multiplie chaque équation (7) par x_i^2 ou par y_i^2, on obtient, à cause de (10),

$$(12)\qquad a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)^2.$$

Par combinaison de (11) avec (12) on trouve,

$$(13)\qquad r^2 = \left(\frac{3a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\alpha\right)^2 + \left(\frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - b^2}\beta\right)^2 \text{ (1)}.$$

4. *Ellipse de Steiner.* — L'équation générale des coniques, dont le centre est en G, est

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 1.$$

Écrivons que cette équation est vérifiée par les coordonnées de A_i. Multiplions d'abord par 1, puis par x_i, enfin par y_i, l'équation obtenue. On trouve, en faisant $i = 1, 2, 3$ et en ajoutant, les égalités

$$Aa^2 + Bb^2 = \tfrac{1}{4},$$

$$(Aa^2 - Bb^2)\alpha + 2Cb^2\beta = 0, \qquad (Aa^2 - Bb^2)\beta - 2Ca^2\alpha = 0,$$

---

(1) Si l'on compare ce résultat à l'un de ceux que nous avons obtenus dans l'article *Sur la droite de Simson*, on voit que le cercle générateur de l'hypocycloïde de Ferrers est égal au cercle des neuf points : on sait déjà que le cercle directeur, trois fois plus grand, est concentrique au même cercle.

pourvu que l'on ait égard aux formules (9). L'équation de l'ellipse de Steiner est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 8.$$

Ainsi, les axes de l'ellipse de Steiner, que nous désignerons désormais par E, ne sont autres que les axes principaux d'inertie du triangle, relatifs au barycentre [1].

5. *Points de Steiner et de Tarry.* — La circonférence circonscrite rencontre E en quatre points, dont trois sont les sommets du triangle, et le quatrième, R, est le *point de Steiner*. Résolvons le système formé par les équations de E et du cercle circonscrit. Par élimination de y, on trouve une équation du quatrième degré en x. Il suffit de calculer les coefficients de x^3 et x^1 : leur rapport, changé de signe, représente, à cause de (3), l'abscisse de R. On trouve ainsi

$$(14) \qquad x = \frac{4a^2\alpha}{a^2 - b^2}, \qquad y = -\frac{4b^2\beta}{a^2 - b^2}.$$

Le *point de Tarry* est le point N, diamétralement opposé à R, sur la circonférence circonscrite. Ses coordonnées sont donc

$$(15) \qquad x = -2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\alpha, \qquad y = 2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\beta.$$

Il en résulte que, si l'on se donnait, dans un triangle, l'orthocentre, H, le barycentre et le point de Tarry, on

---

[1] Les longueurs des demi-axes sont $2a\sqrt{2}$ et $2b\sqrt{2}$ et l'aire de l'ellipse est $8\pi ab$. Comme, d'autre part, l'ellipse E est, d'après un théorème d'Euler, la plus petite qu'on puisse circonscrire à un triangle, on voit, en vertu de (5), que le rapport de l'aire d'une ellipse à l'aire d'un triangle inscrit n'est jamais inférieur à $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

construirait fort aisément les axes de E : ceux-ci sont, en effet, les bissectrices de $\widehat{NGH}$.

6. La relation (12) conduit à poser

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a\sqrt{2}} \cos\varphi, \qquad \beta = \frac{a^2 - b^2}{b\sqrt{2}} \sin\varphi,$$

où φ représente toujours un angle aigu, pourvu que l'on dirige les axes de façon que les coordonnées α et β soient positives. On a, du reste, une interprétation simple de φ, en observant que les formules (14) deviennent

$$x = 2a\sqrt{2}\cos\varphi, \qquad y = -2b\sqrt{2}\sin\varphi.$$

L'anomalie excentrique de R est donc $-\varphi$. Si φ_i est l'anomalie excentrique de A_i, on a, en vertu de (8) et des formules fondamentales,

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0,$$
$$\sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \tfrac{3}{4},$$
$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 = -\tfrac{1}{4}\sin\varphi.$$

Conséquemment [1]

$$(16) \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{3}, \qquad \varphi_2 = \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \qquad \varphi_3 = \frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

Les sommets du triangle et le point de Steiner sont donc *isolés* par les axes de E, de telle sorte que chaque quadrant renferme un de ces points et un seul. Nous voyons, en outre, à cause de (16), que les perpendiculaires abaissées sur le grand axe, par les sommets du triangle, rencontrent la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre en trois points, sommets d'un triangle équilatéral.

---

[1] Voir, par exemple, le *Manuel des candidats*, etc., de M. Catalan (t. I, p. 262).

Soient p l'extrémité du demi grand axe positif, et p', p'' les points de rencontre de l'ellipse (deuxième et troisième quadrant), avec la perpendiculaire au grand axe, passant par le milieu du demi grand axe négatif.

Soient, de même, q l'extrémité du demi petit axe négatif, et q', q'' les points de rencontre de l'ellipse (deuxième et premier quadrant), avec la perpendiculaire au petit axe, passant par le milieu du demi petit axe positif. Les sommets A_1, A_2, A_3 doivent être situés, respectivement, sur les arcs pq'', $p'q'$, $p''q$. Si l'on donne l'ellipse E, on voit qu'il y a une infinité de triangles, inscrits à E, admettant pour point de Steiner un point situé sur un quadrant déterminé de E. Leurs positions extrêmes sont indiquées par les triangles isoscèles $pp'p''$, $qq'q''$. Tous ces triangles ont même aire, et ils sont circonscrits à une ellipse e, homothétique à E, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. L'ellipse e touche chaque côté en son milieu. Si l'on fixe, sur E, la position de R, le triangle correspondant est défini, et le problème de sa détermination se confond avec celui de la trisection de l'angle φ.

7. *Relations entre les coordonnées d'inertie et les coordonnées barycentriques.* — On sait qu'un point quelconque du plan d'un triangle peut être considéré comme le centre de gravité de trois masses μ_1, μ_2, μ_3, dont la somme est 1, appliquées aux sommets du triangle : ces masses sont les *coordonnées barycentriques* du point. Il est évident que les *coordonnées d'inertie* sont données par les formules

$$(17) \qquad x = \sum \mu_i x_i, \qquad y = \sum \mu_i y_i.$$

Inversement, si l'on demande de calculer les coordonnées barycentriques, connaissant les coordonnées d'inertie,

on doit remarquer, avant tout, que l'expression

$$\frac{x_i x_j}{a^2} + \frac{y_i y_j}{b^2}$$

est égale à 8 ou à — 4, suivant que i et j sont ou ne sont pas égaux entre eux. Cela posé, si l'on multiplie respectivement les équations (17) par $\frac{x_i}{a^2}$ et $\frac{y_i}{b^2}$, on obtient, en ajoutant,

$$\mu_i = \tfrac{1}{12}\left(\frac{x x_i}{a^2} + \frac{y y_i}{b^2}\right) + \tfrac{1}{3}. \tag{18}$$

On donne souvent les coordonnées μ en fonction des côtés du triangle. Soit c_i le côté opposé à A_i. Il est clair, d'après (4), que l'on a

$$c_i^2 = \frac{3b^2}{a^2} x_i^2 + \frac{3a^2}{b^2} y_i^2. \tag{19}$$

Inversement,

$$x_i^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(8a^2 - \tfrac{1}{3} c_i^2\right), \qquad y_i^2 = \frac{b^2}{a^2 - b^2}\left(\tfrac{1}{3} c_i^2 - 8b^2\right).$$

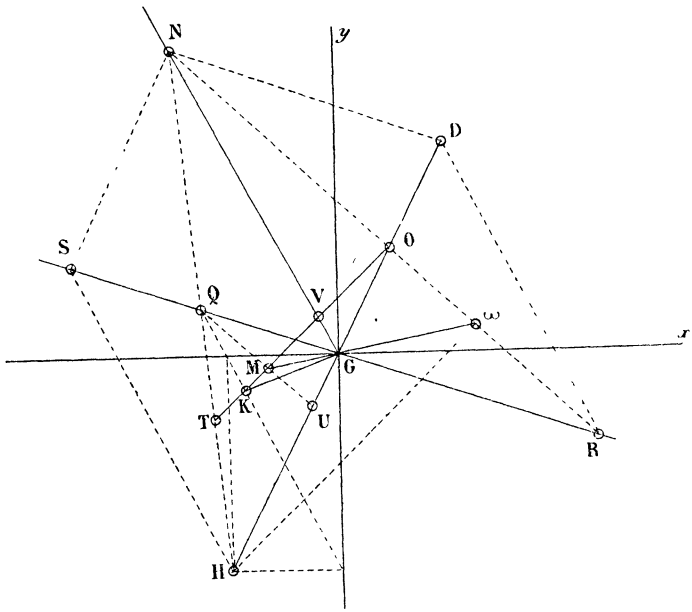
8. *Point de Lemoine.* — On appelle ainsi le point K, dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux carrés des côtés du triangle. D'après les formules (17) et (19), on a

$$x = -\frac{2a^2\alpha}{a^2 + b^2}, \qquad y = -\frac{2b^2\beta}{a^2 + b^2}. \tag{20}$$

Si l'on observe que -2α et -2β sont les coordonnées de H, les équations (20) prouvent que les projections de l'orthocentre sur les axes sont en ligne droite avec le point de Lemoine. On voit donc qu'il est facile de construire les axes de E, connaissant les points G, H, K. Il suffit de décrire la circonférence sur le diamètre GH, et de joindre G aux extrémités du diamètre qui passe par K. Si l'on demande de tracer les axes de l'ellipse centrale

d'inertie d'une section triangulaire donnée, les développements qui précèdent fournissent une construction simple et directe. Il faudra commencer par construire les points G et H, ce qui n'offre aucune difficulté. Quant au point K, il y a plusieurs manières, très simples, de le déterminer. Par exemple, d'après Schlömilch, K est à l'intersection des droites joignant les milieux des côtés aux milieux des hauteurs correspondantes.

9. Les formules (14), (15), (20) mettent en évidence les nombreuses liaisons qui existent entre les points G,



H, K, R, N. On remarquera, avant tout, que le triangle HNR admet pour centre de gravité le point G : le milieu du côté NR est le centre O du cercle circonscrit au triangle fondamental; le milieu de NH est un autre

point remarquable, Q, appartenant, ainsi que le milieu de RH, à la circonférence des neuf points, relative au triangle fondamental. Rappelons que le centre U de cette circonférence est le milieu de OH. Enfin désignons par V le milieu de OK, centre du *cercle de Brocard*. Cela étant, remarquons encore que, connaissant les points G, H, K, on en déduit facilement les points R et N : ceux-ci sont, en effet, avec G et le point D, symétrique de H par rapport à G, les sommets d'un parallélogramme, dont les côtés sont antiparallèles à GH et à GK, relativement aux axes. Voici d'autres remarques, que l'on déduit immédiatement des formules (14), (15) et (20) :

1° Les droites GN et GH sont antiparallèles par rapport aux axes. Il en est de même de GR et GK, de HK et HN, de RN et OK.

2° Considérons les droites

$$\begin{array}{cccccc} GK, & GH, & GR, & GN, & RK, & RN, \\ GH, & HK, & GN, & HN, & RN, & KN; \end{array}$$

désignons par Δ une quelconque des droites de la première ligne, et par Δ' la droite qui lui correspond dans la seconde ligne. On peut affirmer que, dans l'ellipse de Steiner, les normales aux extrémités du diamètre parallèle à Δ sont parallèles à Δ'. Il en résulte, par exemple, que la normale en R à l'ellipse de Steiner est parallèle à GN : c'est donc RD. Ce théorème est dû à Steiner.

3° On peut trouver cinq nouveaux couples de points, appartenant à E : ils sont à l'intersection des parallèles à Δ avec les perpendiculaires à Δ', passant par R et par le point S, symétrique de R relativement à G.

4° Le point V, centre du cercle de Brocard, est en ligne droite avec le barycentre et le point de Tarry. La distance OG est moyenne proportionnelle entre les distances de G à V et à N.

10. *Droites de Simson.* — Cherchons la relation qui doit exister entre p et θ pour que l'équation

$$x\sin\theta + y\cos\theta = p$$

représente une *droite de Simson*. Le côté opposé à A_i a pour équation

$$\frac{xx_i}{a^2} + \frac{yy_i}{b^2} = -1.$$

Qu'on lui élève la perpendiculaire par le point où il rencontre la droite considérée. On trouve que cette perpendiculaire est représentée par l'équation

$$(21)\quad \frac{yx_i}{a^2} - \frac{xy_i}{b^2} = \frac{\left(\frac{x_i^2}{a^4} + \frac{y_i^2}{b^4}\right)p + 1\left(\frac{x_i}{a^2}\sin\theta + \frac{y_i}{b^2}\cos\theta\right)}{\frac{x_i}{a_2}\cos\theta - \frac{y_i}{b^2}\sin\theta}.$$

Soit, successivement, $i = 1, 2, 3$: on obtient par addition,

$$(22)\quad p\sum\frac{\frac{x_i^2}{a^4} + \frac{y_i^2}{b^4}}{\frac{x_i}{a^2}\cos\theta - \frac{y_i}{b^2}\sin\theta} = -1\sum\frac{\frac{x_i}{a^2}\sin\theta + \frac{y_i}{b^2}\cos\theta}{\frac{x_i}{a_2}\cos\theta - \frac{y_i}{b^2}\sin\theta}.$$

Après une suite de calculs, qui n'offrent aucune difficulté, pourvu que l'on ait soin de recourir constamment aux propriétés fondamentales des coordonnées d'inertie, on réduit l'équation (22) à la forme que voici :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} 2p = &-(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) \\ &+ \frac{3a^2+b^2}{a^2-b^2}\alpha\sin 3\theta + \frac{a^2+3b^2}{a^2-b^2}\beta\cos 3\theta. \end{aligned}\right.$$

Pour interpréter cette relation, considérons deux rayons du cercle des neuf points, coïncidant primitivement avec la partie positive de l'axe des ordonnées, et tournant ensuite, autour de U, l'un vers la droite, l'autre vers la

gauche avec une vitesse triple. L'équation (23) exprime que la droite de Simson, perpendiculaire au premier rayon, et la perpendiculaire menée par Q au second rayon sont à égale distance du point U. On a ainsi le moyen de construire la droite de Simson, parallèle à une direction donnée. En particulier, les droites de Simson, parallèles aux axes, passent par le point Q. De même, on détermine aisément les points de rebroussement et les sommets de l'hypocycloïde de Ferrers; car, pour ces points, la distance de la droite de Simson au point U devient nulle ou maxima. Dès lors, si le deuxième des rayons, considérés plus haut, passe par le point Q, le premier rayon détermine, sur la circonférence, un des sommets : les deux autres sommets forment, avec le premier, un triangle équilatéral, inscrit à la circonférence des neuf points. Prolongeant en sens inverse les rayons ainsi obtenus, on détermine, sur la circonférence directrice, les trois points de rebroussement. Le rayon de courbure, en chaque sommet, est double de la distance de ce point au point de rebroussement opposé. D'autre faits géométriques sont renfermés dans la formule (23) : on les met bien facilement en évidence par les méthodes de la Géométrie intrinsèque, comme on l'a vu dans l'article *sur la droite de Simson*.

11. Si, avant d'ajouter les équations (21), on les multipliait par x_1 et y_1, successivement, on obtiendrait les valeurs de x et y, c'est-à-dire des coordonnées du point, pour lequel la droite considérée est une droite de Simson. Mais, pour connaître ce point, nous n'avons besoin que d'une seule relation entre x et y, puisque nous savons déjà qu'il appartient nécessairement à la circonférence circonscrite. Chassons donc les dénominateurs de la formule (21), et multiplions les deux membres par $x_1 y_1$:

soit ensuite $i = 1, 2, 3$. Il vient, par addition,

$$(24) \qquad x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{4}{a^2 - b^2}(a^2\alpha\cos\theta - b^2\beta\sin\theta).$$

équation qui représente une droite, passant toujours par le point de Steiner. En outre, la direction antiparallèle à cette droite, par rapport aux axes, est perpendiculaire à la droite de Simson correspondante. Nous parvenons donc à la proposition que voici : la droite de Simson, relative à un point P, et la droite qui joint le point de Steiner au point P′, diamétralement opposé à P sur la circonférence circonscrite, sont antiparallèles par rapport aux axes de l'ellipse de Steiner. En particulier, les parallèles aux axes, passant par R, déterminent, sur la circonférence, les deux points pour lesquels les droites de Simson sont parallèles aux axes. De même, les quatre couples de directions antiparallèles, que nous avons signalés plus haut, donnent lieu à huit propositions particulières, telles que les suivantes :

1° La droite de Simson, relative au point de Steiner, est parallèle au diamètre du cercle circonscrit, qui passe par le point de Lemoine. Ce théorème est connu : il est dû à M. Boubals.

2° La parallèle à GR, menée par le point de Tarry, rencontre la circonférence en un point, pour lequel la droite de Simson est parallèle à GK.

3° Les droites de Simson, relatives aux projections du point de Steiner, sur les droites joignant le point de Tarry au barycentre et à l'orthocentre, sont respectivement parallèles aux droites qui joignent l'orthocentre au barycentre et au point de Lemoine.

12. *Digression sur la théorie des antiparallèles.* — Nous pouvons réduire ces résultats à une forme très

simple, au moyen de la théorie des antiparallèles, dont nous allons rappeler rapidement les principes, sans insister sur les démonstrations, extrêmement élementaires. Si, par les sommets d'un triangle, on mène les antiparallèles aux côtés opposés, relativement à une direction donnée, les trois droites ainsi obtenues concourent en un point ε de la circonférence circonscrite. Soit η un autre point de cette circonférence, tel que le rayon $O\eta$ soit parallèle à la direction considérée (¹). Les points ε et η se poursuivent, sur la circonférence, la vitesse de ε étant quadruple de celle de η. Soit B_i le point où la parallèle menée par A_i au côté opposé rencontre la circonférence. Il est clair que, si η se trouve au milieu de l'arc A_iB_i, le point ε coïncide avec B_i. Cela étant, partageons l'arc A_iB_i, au point C_i, dans le rapport de 1 à 2. Il est évident, d'après ce que l'on vient de dire, que les points ε et η se confondent en chaque point C_i. Remarquons, en passant, que, d'après la dernière propriété, le triangle $C_1C_2C_3$ est nécessairement équilatéral. Ajoutons, pour finir, que toute conique circonscrite au quadrilatère $\varepsilon A_1A_2A_3$ a un axe parallèle à $O\eta$. Il en résulte que, si la direction de $O\eta$ est celle d'un axe de E, le point ε coïncide avec R.

13. La dernière remarque va nous permettre de simplifier considérablement les propositions obtenues pour les droites de Simson. P et P′ étant deux points diamétralement opposés sur la circonférence circonscrite, nous avons vu que la droite de Simson, relative à P, est antiparallèle à RP′, par rapport aux axes de E. Il est presque évident que cette propriété ne cesse

(¹) A chaque point ε correspondent, sur la circonférence, quatre points η, également espacés : nous n'en considérons qu'un seul.

d'être vraie si les axes de E tournent autour de l'origine, pourvu que le point R se déplace sur la circonférence avec une vitesse angulaire quatre fois plus grande. Donc, plus généralement, la droite de Simson, relative à P, est antiparallèle à $\varepsilon P'$, par rapport à $O\eta$. Autrement : soient ε' et p les points de rencontre de la circonférence avec la parallèle et la perpendiculaire à $O\eta$, menées respectivement par ε et par P. La droite de Simson, relative à P, est parallèle à $\varepsilon' p$.

Exemples. — 1° Si ε coïncide avec B_i, ε' n'est autre que A_i. Donc : la droite de Simson, relative à un point P, est parallèle aux droites qui joignent les sommets du triangle aux extrémités des cordes issues de P, et perpendiculaires aux côtés opposés.

2° Si ε coïncide avec C_i, il en est de même de ε' et de η. Donc, pour obtenir la droite de Simson, relative à P, il suffit de mener, par ce point, la parallèle à OC_i, qui rencontre en p la circonférence. La droite demandée est la parallèle à pC_i, passant, en vertu d'une propriété connue, par le milieu de PH.

3° En particulier, si P est sur le diamètre perpendiculaire à OC_i, la droite correspondante est parallèle à PC_i : elle passe par le milieu de HC_i. Si P coïncide avec C_i, la droite correspondante est parallèle à OC_i : elle passe par le milieu de OH, c'est-à-dire par U. Nous voyons donc que C_1, C_2, C_3 sont précisément les points pour lesquels la droite de Simson contient le centre du cercle des neuf points. Remarquons, à ce propos, que l'on peut faire correspondre, point par point, la circonférence circonscrite et la circonférence des neuf points, en considérant, sur les deux lignes, les extrémités de deux rayons parallèles, dirigés en sens inverse. C'est ainsi que les points R, A_i, B_i, C_i correspondent respectivement au point Q, aux milieux des côtés du triangle fondamental, aux pieds

des hauteurs de ce triangle, et aux sommets de l'hypocycloïde de Ferrers. En général, tout point ε correspond au point de rencontre des droites de Simson parallèle et perpendiculaire à $O\eta$. Remarquons, en outre, que la droite joignant deux points correspondants passe par le barycentre, qui la divise dans le rapport de 2 à 1, et que le milieu de εH est diamétralement opposé, sur la circonférence des neuf points, au point qui correspond à ε. Tout cela tient à ce que les deux circonférences, dont il s'agit ici, admettent respectivement pour centres de similitude directe et inverse l'orthocentre et le barycentre.

14. *Coniques circonscrites, contenant le barycentre.* — Le procédé qui nous a servi pour trouver l'équation de E nous conduit à l'équation

$$(24)\left\{\begin{aligned} &Ax^2+By^2+2Cxy-4(Aa^2+Bb^2)\\ &\quad=\frac{2}{a^2-b^2}[(Aa^2-Bb^2)(\alpha x+\beta y)+2C(b^2\beta x-a^2\alpha y)],\end{aligned}\right.$$

qui représente toute conique circonscrite au triangle fondamental. Si l'on veut que la conique passe par le barycentre, on doit poser

$$Aa^2+Bb^2=0.$$

Pour satisfaire à cette équation, on peut prendre

$$A=B=0,$$

et alors l'équation (24) devient

$$(25)\qquad xy=\frac{2}{a^2-b^2}(b^2\beta x-a^2\alpha y).$$

Mais, plus généralement, nous pouvons faire

$$A=\frac{1}{a^2},\qquad B=-\frac{1}{b^2},\qquad C=\frac{\cot\frac{\lambda}{2}}{ab}.$$

Ces coniques sont donc nécessairement des hyperboles, dont les asymptotes font entre elles un angle V, déterminé par la relation

$$(26) \qquad \operatorname{tang}\tau = \operatorname{tang} V \sin\frac{\lambda}{2},$$

τ étant l'angle des diagonales du rectangle formé par les tangentes aux sommets de E. On démontre aisément que les centres de toutes ces hyperboles sont sur l'ellipse e, qui touche les côtés du triangle en leurs milieux. On peut faire voir, en outre, que λ représente l'angle que le rayon déterminant l'anomalie excentrique du centre de l'hyperbole fait avec le rayon analogue, relatif au point Q. D'après (26), pour avoir $V = \frac{\pi}{2}$, il faut que $\lambda = 0$. Parmi les hyperboles considérées, il y en a donc une seule équilatère : elle a pour centre le point Q. A mesure que le centre de l'hyperbole s'éloigne de Q, sur e, les asymptotes se rapprochent, mais leur angle ne peut devenir inférieur à τ : il atteint ce minimum pour $\lambda = \pi$, c'est-à-dire lorsque le centre de l'hyperbole est au milieu de GR. Cette conique particulière passe évidemment par le point de Steiner. Ses axes sont donc parallèles à ceux de E, et ses asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle formé par les tangentes aux sommets de E.

15. *Hyperbole de Kiepert.* — On appelle ainsi l'hyperbole équilatère circonscrite, qui passe par le centre de gravité. Nous venons de voir que (25) est l'équation de cette courbe, et que son centre est le point Q. En outre, d'après (25), les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux axes de E. Comme toute hyperbole équilatère circonscrite, elle passe par H : c'est ce que l'on vérifie au moyen de (25). Elle passe donc aussi par

le symétrique de H, par rapport à Q, c'est-à-dire par le point de Tarry. Elle contient, enfin, le symétrique de G, par rapport à Q, c'est-à-dire le point S, diamétralement opposé à R, sur E. Quelques-unes de ces propriétés peuvent être aisément généralisées par la théorie des antiparallèles. On trouve que l'hyperbole équilatère circonscrite, dont une asymptote est parallèle à $O\eta_i$, a pour centre le point qui correspond à ε sur la circonférence des neuf points : elle passe, en outre, par le point diamétralement opposé à ε, sur la circonférence circonscrite. Ainsi, par exemple, toute hyperbole équilatère circonscrite, ayant pour centre un sommet de l'hypocycloïde de Ferrers, a une asymptote parallèle à OC_i, et passe par le point diamétralement opposé à C_i sur la circonférence circonscrite.

16. On sait que la tangente en un point quelconque d'une hyperbole équilatère est antiparallèle au rayon vecteur issu du centre, par rapport aux asymptotes. Dans le cas actuel, en tenant compte de quelques remarques précédentes, nous voyons que les tangentes en G et en H sont respectivement antiparallèles à GR et à MH : ce sont donc les droites GK et HK. Conséquemment, les droites qui touchent l'hyperbole de Kiepert, au barycentre et à l'orthocentre, se coupent au point de Lemoine. De même, aux extrémités du diamètre que l'hyperbole a en commun avec le cercle des neuf points, les tangentes sont parallèles au diamètre OK du cercle de Brocard, etc.

17. On sait [1] que les quatre projections d'un point

---

[1] Voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI, p. 241), l'article de M. Neuberg *Sur les normales à l'ellipse*.

P sur une ellipse E appartiennent à une hyperbole équilatère, qui contient, en outre, les points P et G, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de E. D'après cela, si le point P est l'orthocentre H, il est clair que l'hyperbole correspondante n'est autre que l'hyperbole de Kiepert : les projections de H sur E sont S, A_1, A_2, A_3. On pourrait étudier, en général, les liaisons existant entre le point P et le centre P_0 de l'hyperbole correspondante. On trouve sans peine que, si GP_0 est parallèle ou antiparallèle à une droite Δ, la droite GP est respectivement antiparallèle ou parallèle à Δ'. Ainsi, par exemple, on peut donner à ces droites les directions que voici :

(GP_0)..... GK, GN, GR, GH, RK, OK;
(GP)..... GN, HK, GH, HN, OK, NK.

Pour pouvoir déterminer complètement un des points P, P_0, connaissant l'autre, il faut encore observer que la direction PP_0 se déduit de GP, comme celle-ci a été déduite de GP_0. Cela nous permet, par exemple, de donner à ces droites les directions suivantes :

(GP_0)..... GK, GR, RK;
(GP)..... GN, GH, OK;
(PP_0)..... HK, HN, NK.

Ainsi, lorsque P_0 coïncide successivement avec K, Q, le milieu de QR, le milieu de GR, etc., P coïncide avec le symétrique de H, relativement à K, ou avec les points H, O, D, etc. Ajoutons que le point P_0 est toujours en ligne droite avec les projections de P sur les axes. Revenons au cas de P et P_0 coïncidant avec H et Q. L'équation (25), mise sous la forme

$$\frac{y}{x}\,\frac{x+2\alpha}{y+2\beta}=\frac{b^2}{a^2},$$

montre que les parallèles à Δ et Δ', menées respectivement par G et H, concourent sur l'hyperbole de Kiepert. Si nous employons les six couples de directions Δ, Δ', signalés plus haut, les quatre premiers nous conduisent aux points connus G, H, S, N, et les deux derniers nous donnent deux nouveaux points de l'hyperbole de Kiepert. Tout point, P, de cette ligne est le milieu d'un segment intercepté, par les axes de E, sur une droite issue de S. Le symétrique, par rapport à G, du milieu de GP, est le centre d'une conique circonscrite à $RA_1A_2A_3$.

18. *Autres points remarquables.* — Nous allons calculer les coordonnées d'inertie des principaux points qu'il y a lieu de considérer dans le triangle :

1° Nous avons vu qu'un certain point F, appartenant à l'hyperbole de Kiepert, se trouve à l'intersection des parallèles à RK et RN, menées respectivement par les points G et H. Les coordonnées d'inertie de F sont

$$x = -\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}\,\frac{8a^2\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\frac{8b^2\beta}{3a^2-b^2}.$$

2° L'intersection de RN avec la parallèle à OK, passant par H, est un autre point remarquable, ω, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{4a^2\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = \frac{4b^2\beta}{3a^2+b^2}.$$

Ce point appartient aussi à l'hyperbole de Kiepert : il est diamétralement opposé à F, sur cette conique. En d'autres termes, ω est le symétrique de F, par rapport à Q. Les directions Gω et GF sont évidemment antiparallèles par rapport aux axes. Il en est de même des directions MF et MR. La figure MFωH est un parallélogramme. Les droites Gω, OK fournissent un nouveau couple de directions Δ, Δ'. Enfin, on démontre aisément que ω est

le point dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux carrés des côtés.

3° Les droites $G\omega$, OK, UQ concourent en un point M, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2a^2\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = -\frac{2b^2\beta}{3a^2+b^2}.$$

Ce point est évidemment symétrique du milieu de $G\omega$, par rapport à G.

4° L'intersection de OK avec HN est un point T, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2(3a^2+5b^2)a^2\alpha}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}, \qquad y = -\frac{2(5a^2+3b^2)b^2\beta}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}.$$

Les coordonnées barycentriques de ce point sont proportionnelles aux quatrièmes puissances des côtés.

5° Les droites GT, $K\omega$, VH concourent en un point L, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{4a^2\alpha}{5a^2-3b^2}, \qquad y = -\frac{4b^2\beta}{3a^2+5b^2}.$$

Ce point appartient à l'hyperbole de Kiepert.

6° Les droites OL, HM, NK concourent en un point W, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2(a^2+b^2)\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = -\frac{2(a^2+b^2)\beta}{3a^2+b^2}.$$

Les droites GW, OK sont parallèles. Le point W appartient à l'hyperbole de Kiepert : il est diamétralement opposé, sur cette conique, au point de rencontre des parallèles à RN et KN, menées respectivement par G et H.

7° Les droites GH, ML, $T\omega$ concourent en un point Z, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{16a^2b^2\alpha}{9a^4+14a^2b^2+9b^4}, \qquad y = \frac{16a^2b^2\beta}{9a^4+14a^2b^2+9b^4}.$$

La parallèle à RN, menée par le symétrique du milieu de GZ, relativement à G, passe par le point de rencontre des droites GN, Qω.

8° Les droites GK, ML, VW concourent en un même point, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{8(a^2+b^2)a^2\alpha}{7a^4+18a^2b^2+7b^4}, \qquad y = -\frac{8(a^2+b^2)b^2\beta}{7a^4+18a^2b^2+7b^4}.$$

9° Tous ces points ont été considérés par M. Brocard (¹). Un autre point remarquable est le point I, d'où l'on voit les côtés du triangle sous des angles égaux. Ses coordonnées sont

$$x = -\frac{2a\alpha}{a+b}, \qquad y = -\frac{2b\beta}{a+b}.$$

Il existe, dans le plan du triangle, un point I, d'où l'on voit les côtés du triangle sous des angles de 60°. Ses coordonnées sont

$$x = -\frac{2a\alpha}{a-b}, \qquad y = \frac{2b\beta}{a-b}.$$

Les points I et J sont les *centres isogones* du triangle (¹). Au moyen de (25), on vérifie sans peine que ces points sont diamétralement opposés sur l'hyperbole de Kiepert. Le diamètre qui les joint passe évidemment par le point de Lemoine, et les tangentes à l'hyperbole, en I et J, sont parallèles à GH. Les droites GI, GJ sont antiparallèles, par rapport aux axes de E. Enfin, le rayon GJ est celui qui détermine l'anomalie excentrique du point de Steiner.

19. *Cercle et points de Brocard.* — Le cercle de Brocard a pour équation

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)+(a^2-b^2)(\alpha x-\beta y)=(a^2-b^2)^2.$$

(¹) *Nouvelles propriétés du triangle* (Congrès de Rouen, 1883).

(²) NEUBERG, *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 37.

En s'aidant des formules (12) et (13), on trouve que son diamètre est

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} r :$$

telle est la longueur de OK. Les centres de similitude du cercle de Brocard et du cercle circonscrit sont situés sur les axes de E. Il en est de même des centres de similitude du cercle de Brocard et du cercle des neuf points. La perpendiculaire à OK, passant par M, rencontre la circonférence de Brocard en deux points, ω', ω'', qu'on appelle *points de Brocard*. Les coordonnées de ces points sont

$$x = -\frac{2a^2\alpha}{a^2 + 3b^2} \pm \frac{2ab\beta\sqrt{3}}{3a^2 + b^2}, \qquad y = -\frac{2b^2\beta}{3a^2 + b^2} \mp \frac{2ab\alpha\sqrt{3}}{a^2 + 3b^2}.$$

Le pôle de la corde $\omega'\omega''$ n'est autre que le point T. L'angle sous lequel cette corde est vue du centre ne dépasse jamais 120°. On démontre, en effet, que le cosinus de la moitié de l'angle en question est

$$\frac{a^2}{a^2 + 3b^2} + \frac{b^2}{3a^2 + b^2} > \frac{1}{2}.$$

Il est évident que le triangle $\omega\omega'\omega''$ admet même barycentre que le triangle fondamental. En outre, si l'on pose

$$\frac{4a^2\alpha}{a^2 + 3b^2} = 2ma\sqrt{2}\cos\lambda, \qquad \frac{4b^2\beta}{3a^2 + b^2} = 2mb\sqrt{2}\sin\lambda,$$

les coordonnées des points de Brocard deviennent

$$2ma\sqrt{2}\cos\left(\lambda \pm \frac{2\pi}{3}\right), \quad 2mb\sqrt{2}\sin\left(\lambda \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

Il en résulte que le triangle $\omega\omega'\omega''$ est inscrit à une ellipse homothétique à E : les perpendiculaires abaissées sur le grand axe, par les sommets du triangle, rencontrent

la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre en trois points, sommets d'un triangle équilatéral. Cela tient à ce que le triangle $\omega\omega'\omega''$ a mêmes axes principaux d'inertie que le triangle fondamental.

20. *Triangle de Brocard.* — Les perpendiculaires aux côtés de $A_1A_2A_3$, menées par O, rencontrent la circonférence de Brocard en trois points, sommets du *premier triangle de Brocard*. Les coordonnées de ces points sont

$$-\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}\frac{x_1}{2}, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}\frac{y_1}{2}.$$

Il en résulte que, après une dilatation convenable autour du barycentre, le triangle de Brocard devient symétrique, par rapport à Gy, du triangle fondamental. Cette remarque a déjà été faite [1]. Le triangle de Brocard a donc même barycentre et mêmes axes principaux d'inertie que le triangle fondamental, et tout point remarquable p de son plan se déduit du point P, qui joue le même rôle dans le triangle fondamental, en cherchant le symétrique P′ de P, par rapport à Gy, et en réduisant GP′ dans le rapport

$$(27) \qquad \frac{Gp}{GP'} = \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

D'après cela, le point de Steiner du triangle de Brocard n'est autre que le point de Lemoine du triangle fondamental. Cette propriété est connue [2]. De même, le point de Tarry est O; le point de Lemoine se trouve à l'intersection de GR avec la parallèle à RN, menée par

---

(1) Brocard, *Étude d'un nouveau cercle sur le plan d'un triangle* (Congrès d'Alger, 1881).

(2) Neuberg, *Sur le point de Steiner* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1886).

V; l'orthocentre est à l'intersection des droites GN et Hω; le point ω est à l'intersection de GF avec OK; le point F ne diffère pas du point ω, relatif au triangle fondamental; ce dernier point est donc commun aux hyperboles de Kiepert des deux triangles; etc., etc. Si l'on joint les sommets du triangle de Brocard aux sommets et aux milieux des côtés du triangle fondamental, on obtient six droites, qui concourent aux points ω et O. De même, d'après Stoll, si l'on joint les milieux des côtés du triangle de Brocard aux sommets et aux milieux des côtés du triangle fondamental, on obtient six droites, qui concourent aux points L et M. Enfin, remarquons que le triangle de Brocard est homothétique au triangle fondamental, relativement au barycentre commun : le rapport d'homothétie est le carré du rapport (27).

21. *Transformations.* — On sait que ω' et ω'' sont *conjugués isogonaux*, ce qui revient à dire qu'ils sont les foyers d'une conique inscrite au triangle. Il en est de même des points O et H, G et K, L et M, ω et T, V et W. Les conjugués isogonaux de I et J sont deux autres points remarquables, que M. Neuberg a nommés *centres isodynamiques* du triangle. Une autre transformation importante est celle par points *conjugués isotomiques*, consistant en ce que les deux points, qui se correspondent, ont leurs coordonnées barycentriques, de même nom, inverses l'une de l'autre. Ainsi, par exemple, les point K et ω sont conjugués isotomiques. Soit, en général, P' le conjugué isotomique de P. On trouve aisément, au moyen de (18), que les coordonnées barycentriques de P' sont données par la formule

$$\mu'_i = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 - \frac{1}{6}\left(\frac{xx_i}{a^2} + \frac{yy_i}{b^2} - 2\right)^2}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 8};$$

puis, au moyen de (17), on voit que les coordonnées d'inertie de P′ sont

$$(28)\quad \begin{cases} x' = 4\,\dfrac{2x - \dfrac{a^2\alpha}{a^2-b^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right) - \dfrac{2\beta xy}{a^2-b^2}}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-8}, \\[2ex] y' = 4\,\dfrac{2y - \dfrac{b^2\beta}{a^2-b^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right) + \dfrac{2\alpha xy}{a^2-b^2}}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-8}. \end{cases}$$

Si l'on introduit, comme plus haut, l'anomalie excentrique de R, et que l'on pose

$$\frac{x}{2a\sqrt{2}} = m\cos\lambda, \qquad \frac{y}{2b\sqrt{2}} = m\sin\lambda,$$

on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{m}{m^2-1}\left[\cos\lambda - m\cos(\varphi - 2\lambda)\right], \\[2ex] \dfrac{y'}{2b\sqrt{2}} = \dfrac{m}{m^2-1}\left[\sin\lambda - m\sin(\varphi - 2\lambda)\right]. \end{cases}$$

En particulier, si $\lambda = \frac{\varphi}{3}$, on a

$$\frac{x'}{2a\sqrt{2}} = -\frac{m}{m+1}\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad \frac{y'}{2b\sqrt{2}} = -\frac{m}{m+1}\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Il en résulte que, si P est sur une médiane, il en est de même de P′. Ces deux points sont alors conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes de la médiane. Si P est sur E, P′ est rejeté à l'infini, suivant une direction dont le coefficient angulaire est

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}\cot\frac{\lambda-\varphi}{2}.$$

En particulier, si $\lambda = -\varphi$, c'est-à-dire si P coïncide

avec R, P′ est à l'infini, sur la direction perpendiculaire à GH, etc.

22. De la transformation par *polarité trilinéaire* (¹) nous déduisons une transformation nouvelle, étroitement liée à celle qui précède. Lorsqu'un point parcourt une conique circonscrite au triangle, sa polaire trilinéaire pivote autour d'un point π, *pôle d'homologie* de la conique considérée. Soit π' le centre de la conique. Il y a réciprocité entre les points π et π'; car, si μ_i et μ'_i sont les coordonnées barycentriques de ces points, on démontre que

$$(29) \qquad \mu_2\mu'_3 + \mu_3\mu'_2 = \mu_3\mu'_1 + \mu_1\mu'_3 = \mu_1\mu'_2 + \mu_2\mu'_1.$$

Or, identiquement,

$$\mu_2\mu'_3 + \mu_3\mu'_2 = \tfrac{1}{2}(1 - 2\mu_1)(1 - 2\mu'_1) + \tfrac{1}{2} - \sum \mu_i\mu'_i.$$

Les conditions (29) reviennent donc à dire que le produit $(1 - 2\mu_i)(1 - 2\mu'_i)$ ne dépend pas de i. Conséquemment, pour obtenir un couple de points π, π', il suffit de prendre deux points P, P′, conjugués isotomiques, et les points demandés sont les symétriques, par rapport à G, des milieux de GP et GP′. En particulier, on peut supposer que π et π' soient deux points, divisant harmoniquement un des segments GA_i. Si π coïncide avec O, π' n'est autre que K; si π se meut sur une droite passant par K, π' décrit une hyperbole équilatère, contenant O; si π parcourt l'ellipse e ou la circonférence des neuf points, π' est à l'infini ou bien sur la polaire trilinéaire de H, qui est l'axe radical du cercle circonscrit et du

(¹) MATHIEU, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865.

cercle des neufs points; etc. Les formules de transformation se déduisent des formules (28) en y remplaçant $x, y, \ldots$ par $-2x, -2y, \ldots$.

23. Il y aurait à étudier plus généralement, les transformations quadratiques réversibles, que l'on obtient en cherchant toutes les formes quadratiques, telles qu'une même forme des coordonnées barycentriques d'un point représente les coordonnées barycentriques de son conjugué, et réciproquement, abstraction faite d'un facteur indépendant de i. C'est ainsi, par exemple, que si l'on pose

$$\frac{\mu_1^2 - \mu_2\mu_3}{\mu'_1} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3\mu_1}{\mu'_2} = \frac{\mu_3^2 - \mu_1\mu_2}{\mu'_3} = \mu.$$

on en déduit

$$\frac{\mu_1'^2 - \mu'_2\mu'_3}{\mu_1} = \frac{\mu_2'^2 - \mu'_3\mu'_1}{\mu_2} = \frac{\mu_3'^2 - \mu'_1\mu'_2}{\mu_3} = \mu',$$

où

$$\mu = 1 - 3(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2).$$
$$\mu' = 1 - 3(\mu'_2\mu'_3 + \mu'_3\mu'_1 + \mu'_1\mu'_2),$$

et l'on démontre que

$$\mu\mu' = 1, \qquad \sum \mu_i\mu'_i = 1. \qquad \ldots.$$

Comme précédemment, les médianes se transforment en elles-mêmes, de telle sorte que deux points conjugués, situés sur GA_i, sont séparés harmoniquement par A_i et par le symétrique de ce point, relativement à G. La question générale, que nous venons de poser, est susceptible d'une intéressante interprétation géométrique, et d'un développement considérable.