NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T.-J. STIELTJES

Note sur la multiplication de deux séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 210-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__210_0>

NOTE SUR LA MULTIPLICATION DE DEUX SÉRIES;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

Supposons qu'on ait deux séries convergentes

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots.$$

Lorsque ces deux séries sont absolument convergentes, on sait que la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, sera absolument convergente et égale à st (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 110).

Dans la suite, nous supposons que la série

$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

est absolument convergente; mais quant à la série

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

nous ne supposerons rien de plus que sa convergence.

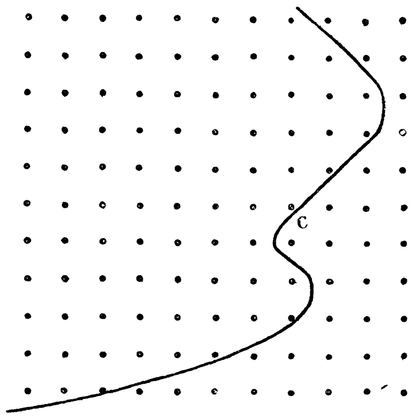
Dans ces conditions, la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ n'est plus nécessairement absolument convergente, et par conséquent il faudra préciser l'ordre dans lequel on effectue la sommation.

Écrivons pour cela les termes $u_\alpha v_\beta$ dans le Tableau suivant

$$\begin{array}{lllll}
u_1 v_1, & u_2 v_1, & u_3 v_1, & u_4 v_1, & \ldots, \\
u_1 v_2, & u_2 v_2, & u_3 v_2, & u_4 v_2, & \ldots, \\
u_1 v_3, & u_2 v_3, & u_3 v_3, & u_4 v_3, & \ldots, \\
u_1 v_4, & u_2 v_4, & u_3 v_4, & u_4 v_4, & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots,
\end{array}$$

ou, plus simplement, en indiquant les termes $u_\alpha v_\beta$ par des points

(A)



Traçons maintenant dans ce Tableau (A) une courbe C qui est coupée en un point seulement par une droite horizontale, et prenons la somme de tous les termes $u_\alpha v_\beta$ qui se trouvent du même côté de cette courbe que $u_1 v_1$.

Si maintenant la courbe C se déforme d'une manière quelconque en s'éloignant indéfiniment, mais à la condition d'avoir toujours une seule intersection avec une droite horizontale, nous aurons fixé par là l'ordre dans lequel on doit prendre les termes de la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$. Nous allons faire voir qu'on a alors

$$\Sigma u_\alpha v_\beta = st.$$

Soit L la limite supérieure des modules des sommes

$$\begin{aligned}
&u_1,\\
&u_1 + u_2,\\
&u_1 + u_2 + u_3,\\
&u_1 + u_2 + u_3 + u_4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

et ε_n la limite supérieure des modules des sommes

$$
\begin{aligned}
&u_{n+1},\\
&u_{n+1}+u_{n+2},\\
&u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3},\\
&u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+u_{n+4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Alors L est finie et ε_n converge vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$, parce que la série $s = u_1 + u_2 + \ldots$ est convergente.

Soit enfin η_n la limite supérieure des sommes

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{mod} v_{n+1},\\
&\operatorname{mod} v_{n+1}+\operatorname{mod} v_{n+2},\\
&\operatorname{mod} v_{n+1}+\operatorname{mod} v_{n+2}+\operatorname{mod} v_{n+3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Comme nous admettons que la série

$$T = \operatorname{mod} v_1 + \operatorname{mod} v_2 + \operatorname{mod} v_3 + \ldots$$

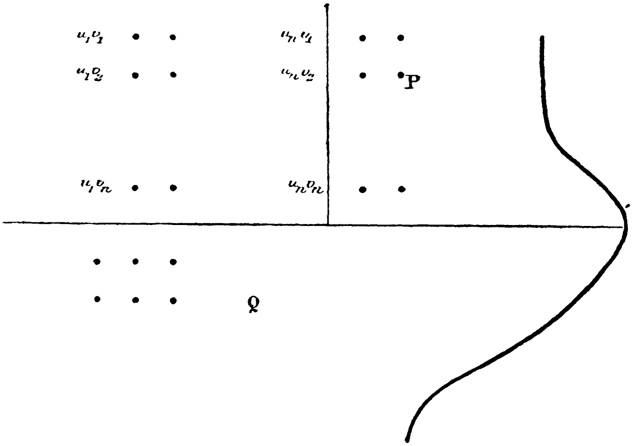
est convergente, η_n converge encore vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

Posons maintenant

$$
\begin{aligned}
s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\\
t_n &= v_1 + v_2 + \ldots + v_n,
\end{aligned}
$$

et prenons dans la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ un nombre de termes assez grand pour y retrouver tous ceux du produit $s_n t_n$.

La courbe C enveloppera alors le carré



et, si nous prolongeons le côté horizontal inférieur jusqu'à l'intersection avec C, nous aurons

$$(\Sigma u_\alpha v_\beta)_C = s_n t_n + P + Q.$$

$$\begin{aligned} P = {} & v_1\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) \\ & + v_2\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + v_n(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots), \\ Q = {} & v_{n+1}(u_1 + u_2 + u_2 + \ldots) \\ & + v_{n+2}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) \\ & + v_{n+3}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a évidemment

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod} P < \varepsilon_n(\operatorname{mod} v_1 + \operatorname{mod} v_2 + \ldots + v_n) < T\varepsilon_n, \\ &\operatorname{mod} Q < L\eta_n, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, pour $n = \infty$,

$$\lim P = 0, \qquad \lim Q = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma u_\alpha v_\beta = \lim s_n t_n = st. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Applications.

I. Prenons les deux séries

(1) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

(2) $$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots.$$

En ordonnant le produit suivant les puissances de z

(3) $$f(z)\,g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots,$$

les courbes C sont des droites inclinées de 45°.

Si les séries (1), (2) sont convergentes pour $z = \mathrm{R}$ et que la convergence soit absolue pour l'une de ces deux séries, alors, d'après le théorème démontré, la série (3) sera également convergente pour $z = \mathrm{R}$ et égale à

$$f(\mathrm{R})\,g(\mathrm{R}).$$

II. Prenons les séries

$$\mathrm{F}(s) = f(1) + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \frac{f(4)}{4^s} + \ldots,$$

$$\mathrm{G}(s) = g(1) + \frac{g(2)}{2^s} + \frac{g(3)}{3^s} + \frac{g(4)}{4^s} + \ldots.$$

En multipliant, on peut mettre le produit sous la forme

$$\mathrm{F}(s)\,\mathrm{G}(s) = h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \frac{h(4)}{4^s} + \ldots,$$

en posant

$$h(n) = \Sigma f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right),$$

d parcourant tous les diviseurs de n. Les courbes C sont évidemment des hyperboles équilatères.

D'après notre proposition, lorsque la convergence de l'une des séries $\mathrm{F}(s)$, $\mathrm{G}(s)$ est absolue, alors la série

$$h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \ldots$$

sera convergente et égale à $\mathrm{F}(s)\,\mathrm{G}(s)$.

Nous énoncerons encore la proposition suivante :

Supposons que les séries $F(s)$, $G(s)$ soient convergentes pour $s = \alpha$, elles seront encore convergentes pour $s > \alpha$. Si maintenant la convergence n'est pas absolue, on pourra cependant déterminer deux nombres positifs β, γ, tels que la série $F(s)$ soit absolument convergente pour $s = \alpha + \beta$, et la série $G(s)$ absolument convergente pour $s = \alpha + \gamma$.

Alors la série

$$h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \dots$$

est convergente et égale à $F(s)\,G(s)$ pour les valeurs de $s \geqq \alpha + \dfrac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}$. Cette série est aussi convergente et égale à $F(s)\,G(s)$ pour $s \geqq \alpha + \frac{1}{2}$.

Lorsque β ou γ est égal à zéro, on retombe sur la proposition démontrée plus haut.