Weill

Sur les courbes unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 205-207
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__205_1>

SUR LES COURBES UNICURSALES;

PAR M. WEILL.

Les équations

$$x = \frac{a\lambda^p + b\lambda^{p-1} + \ldots}{a'\lambda^p + b'\lambda^{p-1} + \ldots}, \qquad y = \frac{k\lambda^p + l\lambda^{p-1} + \ldots}{a'\lambda^p + b'\lambda^{p-1} + \ldots},$$

qui définissent une courbe unicursale de degré p, peuvent s'écrire

$$x = \frac{a}{a'} + \sum \frac{\mathrm{A}}{\lambda - \alpha}, \qquad y = \frac{k}{a'} + \sum \frac{\mathrm{B}}{\lambda - \alpha}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point de coordonnées

$$x_1 = \frac{a}{a'}, \qquad y_1 = \frac{k}{a'}$$

et qui appartient à la courbe. Considérons les deux droites définies par les équations

$$\xi = \frac{A}{\lambda - \beta}, \qquad \eta = \frac{B}{\lambda - \alpha},$$

$$\xi' = \frac{A_1}{\lambda - \alpha}, \qquad \eta' = \frac{B_1}{\lambda - \beta},$$

si l'on prend sur chacune de ces droites un point correspondant à une valeur donnée de λ, on obtiendra deux points variables, et la droite qui joint ces deux points passera, quel que soit λ, par un point fixe P_1. A deux quelconques des racines α, β combinées entre elles correspondra un point fixe tel que P_1; on forme ainsi un système de p droites fixes passant par l'origine, et parallèles aux asymptotes de la courbe donnée; un polygone variable a chacun de ses sommets sur une de ces droites; la variation de ce polygone est déterminée par la condition que ses côtés et diagonales intérieures pivotent autour de pôles fixes; on prend le centre G des moyennes distances de ces sommets et l'on joint ce point au point O intersection des droites fixes; enfin on prend sur OG un point M tel que $\frac{\text{OG}}{\text{OM}} = \frac{1}{p}$; le point M décrit la courbe unicursale considérée. On peut donc énoncer le résultat suivant : si l'on considère dans un plan p droites fixes concourantes et $(p - 1)$ points fixes quelconques, la courbe unicursale la plus générale de l'ordre p est décrite par le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone variable dont les sommets décrivent les droites pendant que $(p - 1)$ côtés consécutifs passent par les points fixes. Réciproquement, étant donnée une courbe unicursale, il serait intéressant d'étudier la position des pôles fixes, leurs relations géométriques avec la courbe; mais les résultats ne paraissent pas assez simples pour être indiqués.