

H. LAURENT

**Sur les conditions d'intégrabilité d'une
expression différentielle**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 19-24

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__19_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ D'UNE EXPRESSION
DIFFÉRENTIELLE;**

PAR M. H. LAURENT.

On dit ordinairement que, pour que l'expression

$$(1) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

soit une différentielle exacte, p_1, p_2, \dots, p_n désignant des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n , il faut et il suffit que les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations comprises dans le type

$$(2) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0$$

soient identiquement satisfaites; mais ce que l'on ne dit pas toujours, c'est que ces conditions peuvent être remplacées par d'autres moins générales.

Si l'on pose

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i},$$

Jacobi a remarqué que l'on avait

$$(3) \quad \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_j} = 0.$$

Ce résultat est facile à vérifier en effectuant les différentiations indiquées. Il en a conclu qu'une partie des relations (2) rentraient les unes dans les autres, lorsque n était plus grand que 3. Mais l'illustre géomètre aurait pu déduire d'autres conséquences de la formule (3). Supposons, en effet, $p_{ij} = 0$, $p_{ik} = -p_{ki} = 0$; on aura

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} = 0,$$

et, par suite, p_{ik} est indépendant de x_j ; il résulte de là que, si l'on a

$$p_{12} = 0, \quad p_{13} = 0, \quad \dots, \quad p_{1n} = 0,$$

les quantités p_{ij} , où i et j sont différents de 1, sont indépendantes de x_1 . Si donc elles sont nulles pour une valeur particulière x_1^0 de x_1 , elles seront nulles, quel que soit x_1 ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'expression (1) soit une différentielle exacte, il faut et il suffit :

1° *Que l'on ait identiquement*

$$(4) \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{\partial p_3}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_1};$$

2° *Que l'expression*

$$p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

soit une différentielle exacte relativement à x_2, x_3, \dots, x_n pour $x_1 = x_1^0$.

En d'autres termes, les relations (2), dans lesquelles i et j sont différents de 1, n'ont besoin d'être satisfaites que pour $x_1 = x_1^0$.

Cette remarque m'a permis de simplifier un certain nombre de théories relatives aux dérivées partielles; je vais montrer comment elle conduit de la façon la plus simple à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1; x_2, \dots, x_n, t, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

qui est le type auquel on peut ramener toutes les équations du premier ordre. Dans cette équation, u désigne une fonction inconnue des variables x_1, x_2, \dots, x_n, t et de $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$ ne contenant pas u explicitement.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver des fonctions p_1, p_2, \dots, p_n rendant l'expression

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n + f dt$$

égale à une différentielle exacte du dont l'intégrale sera alors la fonction inconnue u . D'après notre remarque, il faudrait que l'on eût

$$(6) \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{df}{dx_1}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{df}{dx_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial p_n}{\partial t} = \frac{df}{dx_n}$$

identiquement, et que, pour $t = t^0$, on eût

$$(7) \quad p_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n},$$

ϖ désignant une fonction arbitraire de x_1, \dots, x_n , à laquelle se réduira u pour $t = t^0$.

Les équations (6) doivent s'écrire

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{11} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{21} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{n1}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{12} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{22} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{n2}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

p_{ij} désignant, pour abrégé, $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$. Je remplace ces équations par les suivantes :

$$(8 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{11} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{12} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{1n}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{21} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{22} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{2n}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Il faut intégrer le système (8), de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$p_i = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i},$$

et alors p_1, p_2, \dots seront les dérivées de la fonction u

satisfaisant à l'équation (5). Mais, en intégrant le système (8 bis), de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$p_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i},$$

les fonctions p seront aussi les dérivées d'une certaine fonction, et l'on aura

$$p_{ij} = p_{ji},$$

et, par suite, les équations (8) auront, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, les mêmes solutions que (8 bis). Ce sont alors les équations (8) que nous allons essayer d'intégrer.

On a

$$dp_1 = p_{11} dx_1 + p_{12} dx_2 + \dots + p_{1n} dx_n - \frac{\partial p_1}{\partial t} dt,$$

$$dp_2 = p_{21} dx_1 + p_{22} dx_2 + \dots + p_{2n} dx_n - \frac{\partial p_2}{\partial t} dt,$$

.....

Tirons $\frac{\partial p_1}{\partial t}, \frac{\partial p_2}{\partial t}, \dots$ des équations (8) pour les porter dans celles-ci, elles deviendront

$$p_{11} \left(dx_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1} dt \right) + \dots + p_{1n} \left(dx_n + \frac{\partial f}{\partial p_n} dt \right) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dt - dp_1 = 0,$$

$$p_{21} \left(dx_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1} dt \right) + \dots + p_{2n} \left(dx_n + \frac{\partial f}{\partial p_n} dt \right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} dt - dp_2 = 0,$$

.....

et si l'on établit entre les x et les p les relations suivantes :

$$(9) \quad \frac{dx_1}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial p_n},$$

il faudra, en vertu des équations précédentes, que l'on ait aussi

$$(10) \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{dp_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Intégrons alors les équations (9) et (10) qui sont des équations différentielles ordinaires, de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$x_i = x_i^0, \quad p_i = p_i^0;$$

n des intégrales de ces équations devront être des conséquences des n autres, et les intégrales p_1, p_2, \dots des équations (8) s'obtiendront en écrivant n relations arbitraires entre $p_1^0, p_2^0, \dots, x_1^0, x_2^0, \dots$.

Prenons, pour ces relations arbitraires,

$$(11) \quad p_1^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0}, \quad \dots, \quad p_n^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n^0},$$

$\varpi(x_1^0, \dots, x_n^0)$ désignant une fonction arbitraire de x_1^0, \dots, x_n^0 ; les quantités p ainsi déterminées rendront $\Sigma p dx + f dt$ différentielle exacte d'une fonction u qui, pour $t = t^0$, se réduira à $\varpi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

En effet, soient

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \theta_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t), & p_2^0 &= \theta_2, & p_n &= \theta_n, \\ x_1^0 &= \psi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t), & x_2^0 &= \psi_2, & x_n &= \psi_n \end{aligned}$$

les intégrales de (9), (10), les intégrales de (8) seront les résultantes provenant de l'élimination de x_1^0, x_2^0, \dots entre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0} &= \theta_1(x_1, \dots, x_n, t), & \frac{\partial \varpi}{\partial x_2^0} &= \theta_2, & \dots, \\ x_1^0 &= \psi_1(x_1, \dots, x_n, t), & x_2^0 &= \psi_2, & \dots \end{aligned}$$

Si l'on fait $t = t^0$, ces formules devront être identiquement satisfaites pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots$; ainsi l'on a les identités

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0} = \theta_1(x_1^0, \dots, x_n^0, t^0), \quad \frac{\partial \varpi}{\partial x_2^0} = \theta_2, \quad \dots$$

Mais les x^0 étant arbitraires, on peut les remplacer par

les x , et l'on a

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = \theta_1(x_1, \dots, x_n, t^0), \quad \dots$$

Mais $\theta_1(x_1, \dots, x_n, t_0)$ est la valeur de p_1 pour $t = t^0$; donc, pour $t = t^0$, p_1, p_2, \dots se réduisent aux dérivées de $\varpi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, et u à la fonction ϖ , si l'on veut.

C. Q. F. D.