NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur une application du théorème de Rolle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 190-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__190_1>

SUR UNE APPLICATION DU THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Si l'on prend les dérivées par rapport à x et à y de l'expression $(x^2+y^2-r^2)^n$, α fois par rapport à x et β fois par rapport à y, les nombres α et β étant des entiers quelconques, mais tels que $2n-(\alpha+\beta)>0$, on obtient une fonction de degré $2n-(\alpha+\beta)$ en x et y. Si l'on égale à zéro cette fonction, l'équation obtenue représente une courbe qui, abstraction faite des axes de coordonnées, se trouve tout entière renfermée dans le cercle $x^2+y^2-r^2=0$.

Nous allons démontrer cette propriété, bien connue d'ailleurs, en nous appuyant sur les théorèmes suivants :

2. THÉORÈME I. — *Si $\Phi(x)$ est un polynôme en x^2 dont tous les zéros sont imaginaires, mais de la forme $\pm ai$, a étant une quantité réelle, les équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées successives de $\Phi(x)$ n'ont d'autres racines réelles que $x=0$ et leurs racines imaginaires sont toutes de la même forme que celles de $\Phi(x)=0$.*

En effet, soit

$$\Phi(x)=\varphi(x^2),$$

on aura

$$\Phi'(x)=2x\,\varphi'(x^2).$$

Si l'on pose $x^2=z$, l'équation $\varphi(z)=0$ a toutes ses racines réelles et négatives ; par suite, l'équation $\varphi'(z) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles et négatives: le théorème est donc démontré pour l'équation

$$\Phi'(x) = 0.$$

Formons $\Phi''(x)$, on a

$$\Phi''(x) = 4x^2\varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2);$$

l'équation $\Phi''(x) = 0$ ne contient que des puissances paires de x; en posant $x^2 = z$, nous allons montrer que l'équation

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

a toutes ses racines réelles et négatives. En effet, l'équation $\varphi(z) = 0$ ayant toutes ses racines réelles et négatives, il en est de même de l'équation $\varphi'(z) = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de cette équation ; substituons-les dans la fonction

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z),$$

elle devient successivement

$$4\alpha_1\varphi''(\alpha_1),\quad 4\alpha_2\varphi''(\alpha_2),\quad \ldots,\quad 4\alpha_n\varphi''(\alpha_n).$$

Les quantités $\varphi''(\alpha_1)$, $\varphi''(\alpha_2)$, . ., $\varphi''(\alpha_n)$, d'après le théorème de Rolle, sont de signes contraires, par conséquent la suite des quantités

$$4\alpha_1\varphi''(\alpha_1),\quad 4\alpha_2\varphi''(\alpha_2),\quad \ldots,\quad 4\alpha_n\varphi''(\alpha_n)$$

ne présente que des variations. L'équation

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

a donc $n - 1$ racines réelles comprises entre α_1 et α_2, α_2 et α_3, ..., α_{n-1} et α_n ; comme elle est de degré n, elle a toutes ses racines réelles.

La $n^{\text{ième}}$ racine ne peut pas être positive, car $\varphi''(z)$

et $\varphi'(z)$ sont des polynômes qui ne présentent pas de variations, puisque tous leurs zéros sont réels et négatifs; par suite

$$4z\varphi''(z)+2\varphi'(z)$$

n'en présente pas non plus; toutes les racines de l'équation

$$4z\varphi''(z)+2\varphi'(z)=0$$

sont donc réelles et négatives. On en conclut que les racines de l'équation $\Phi''(x)=0$ sont toutes imaginaires et de même forme que celles de $\Phi(x)=0$.

Il est bien évident que ces deux propositions démontrent le théorème.

3. Théorème II. — *Si $\Phi(x)$ est un polynôme en x^2, tel que l'équation $\Phi(x)=0$ n'admette pour racines imaginaires que des quantités de la forme $\pm ai$, a étant réel, les dérivées successives de $\Phi(x)$ égalées à zéro nous fourniront des équations dont toutes les racines réelles sont comprises entre la plus grande et la plus petite des racines réelles de $\Phi(x)=0$.*

Si

$$\Phi(x)=(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\ldots(x^2-a_n^2)(x^2+\alpha_1^2)\ldots(x^2+\alpha_p^2),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des quantités que nous supposerons positives et rangées dans l'ordre croissant, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des quantités réelles, les racines réelles des équations $\Phi^{(\mu)}(x)=0$ sont toutes comprises entre $-a_n$ et $+a_n$.

Posons encore

$$\Phi(x)=\varphi(x^2),$$

on aura

$$\Phi'(x)=2x\varphi'(x^2);$$

en posant, comme précédemment, $x^2=z$, l'équation $\varphi'(z)=0$ a toutes ses racines réelles.

$\Phi'(x) = 0$ a pour racines réelles zéro et $2(n-1)$ autres racines comprises entre les nombres des suites

$$-a_n, \quad -a_{n-1}, \quad \ldots, \quad -a_1$$

et

$$+a_1, \quad +a_2, \quad \ldots, \quad +a_{n-1}, \quad +a_n.$$

Soient

$$-b_{n-1}, \quad -b_{n-2}, \quad \ldots, \quad -b_1, \quad 0,$$
$$+b_1, \quad +b_2, \quad \ldots, \quad +b_{n-1}$$

les $2n-1$ racines réelles de l'équation dérivée

$$\Phi'(x) = 0,$$

que le théorème de Rolle nous permet de mettre immédiatement en évidence ; une autre racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$ est comprise entre a_1^2 et $-\alpha_1^2$; elle peut être positive ou négative. Si elle est positive, à cette racine correspondront deux racines réelles de l'équation $\Phi'(x) = 0$, en valeur absolue moindres que a_1 et, si elle est négative, il lui correspondra, dans $\Phi'(x) = 0$, deux racines imaginaires de la forme $\pm ai$; quant aux racines de $\varphi'(z) = 0$, comprises entre $-\alpha_1^2$ et $-\alpha_p^2$, il ne leur correspond dans $\Phi'(x) = 0$ que des racines imaginaires de la forme $\pm ai$; l'équation $\Phi'(x) = 0$ n'a donc pour racines réelles que des quantités comprises entre $-a_n$ et $+a_n$, ce qui démontre le théorème pour $\Phi'(x)$

On a, comme précédemment,

$$\Phi''(x) = 4x^2\varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2) = \theta(x^2).$$

L'équation $\Phi''(x) = 0$ ne renferme que des puissances paires de x ; en posant $x^2 = z$, elle devient

$$\theta(z) = 4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles.

En effet, nous avons vu que $\Phi'(x) = 0$ a $2n-1$ racines réelles

$$-b_{n-1},\quad -b_{n-2},\quad \ldots,\quad -b_1,\quad 0,\quad +b_1,\quad \ldots,\quad +b_{n-1},$$

et qu'elle pouvait avoir de plus deux autres racines réelles entre o et b_1 et entre o et $-b_1$. Elle a toujours au moins $2(p-1)$ racines imaginaires de la forme $\pm ai$. Si $\Phi'(x)=0$ a $2n-1+2$ racines réelles, $\Phi''(x)=0$ a $2n$ racines réelles dans les intervalles présentés par les premières; mais alors $\Theta(z)=0$ a n racines positives et $p-2$ racines négatives; car nous avons vu que $\varphi'(z)=0$ a $p-1$ racines négatives, et ces racines substituées dans $\Theta(z)$ donnent des résultats de substitution de signes contraires. L'équation

$$\Theta(z)=0$$

a donc, dans ce cas, $n+p-2$ racines réelles et, comme elle n'est que de degré $n+p-1$, toutes ses racines sont réelles.

Si, au contraire, $\Phi(x)=0$ n'a que $2n-1$ racines réelles, $\Phi''(x)=0$ n'aura que $2n-2$ racines réelles dans l'intervalle de $-b_{n-1}$ à $+b_{n-1}$, mais alors

$$\varphi'(z)=0$$

a p racines négatives qui sépareront $p-1$ racines réelles de $\Theta(z)=0$; on en conclut que $\Theta(z)=0$ a $n+p-2$ racines réelles et, par suite, que, dans les deux cas, toutes ses racines sont réelles.

L'équation $\Theta(x^2)=0$ est de la forme de $\Phi(x)=0$; elle n'a, d'après ce que nous venons de démontrer, que des racines réelles et des racines imaginaires de la forme $\pm ai$; on démontrerait sur cette équation que ses deux premières équations dérivées remplissent également les conditions de l'énoncé, et ainsi de suite.

Il faut toutefois que la $(n+p-1)^{\text{ième}}$ racine de

$\Theta(z) = 0$, sur l'ordre de grandeur de laquelle nous ne savons rien jusqu'ici, soit moindre que a_n, si elle est positive. Nous allons démontrer qu'elle est moindre que la plus grande racine positive α de l'équation $\varphi'(z) = 0$; elle sera alors moindre que a_n. Il suffit de faire voir que $\Theta(+\infty)$ et $\Theta(\alpha)$ sont de mêmes signes. Or, $\Theta(+\infty)$ est du signe de $\varphi''(+\infty)$, $\Theta(\alpha)$ est du signe de $\varphi''(\alpha)$; entre α et $+\infty$, $\varphi''(z) = 0$ n'a pas de racine : donc, $\Theta(+\infty)$ et $\Theta(\alpha)$ sont de mêmes signes.

4. Les théorèmes I et II subsistent, quand même un certain nombre de facteurs de la forme $x^2 - a^2$ ou $x^2 + \alpha^2$ deviennent égaux entre eux.

En particulier, si toutes les racines sont imaginaires et deviennent égales deux par deux, c'est-à-dire si

$$\Phi(x) = (x^2 + \alpha^2)^n,$$

toutes les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines imaginaires, sauf la racine $x = 0$; si

$$\Phi(x) = (x^2 - a^2)^n,$$

toutes les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont leurs racines réelles et comprises entre $-a$ et $+a$.

Les démonstrations précédentes s'appliquent sans modifications sensibles.

Cela posé, nous allons passer à la démonstration du théorème énoncé au début.

5. Considérons la fonction $U = (x^2 + y^2 - r^2)^n$. Nous allons démontrer que l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} = 0$$

représente une courbe qui, abstraction faite des axes de coordonnées, est renfermé tout entière dans le cercle $x^2+y^2-r^2=0$.

La dérivée $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$ est de la forme

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}=(x^2+y^2-r^2)^{n-\alpha}\Phi(x,y):$$

$\Phi(x,y)$ étant un polynôme en x^2 et y^2, et qui renferme x en facteur s'il est de degré impair. On voit, à l'inspection de ce polynôme, qu'il est de la forme

$$x^\varepsilon\varphi(r^2,\ x^2+y^2-r^2),$$

la fonction φ étant homogène en x^2 et $x^2+y^2-r^2$, et ε étant zéro ou un.

On pourra donc écrire

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}=x^\varepsilon(x^2+y^2-r^2)^{n-\alpha}\varphi(x^2,\ x^2+y^2-r^2).$$

La fonction homogène $\varphi(x^2,\ x^2+y^2-r^2)$ peut être décomposée en un produit de facteurs de la forme

$$\begin{gathered}\lambda(x^2+y^2-r^2+\lambda_1x^2)\\(x^2-y^2-r^2+\lambda_2x^2)\ldots(x^2+y^2-r^2+\lambda_{\alpha'}x^2):\end{gathered}$$

les quantités $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\alpha$ sont indépendantes de x, de y et de r: ce sont des quantités numériques réelles et positives.

En effet, dans l'hypothèse de $r^2-y^2>0$, les racines de l'équation

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}=0$$

sont, d'après les théorèmes précédents, toutes réelles et comprises entre

$$-\sqrt{r^2-y^2}\quad\text{et}\quad+\sqrt{r^2-y^2}.$$

Comme on doit avoir, en désignant par x_μ une de ces racines,

$$x_\mu^2 + y^2 - r^2 + \lambda x_\mu^2 = 0$$

et que

$$x_\mu^2 < r^2 - y^2,$$

il s'ensuit que

$$x_\mu^2 + y^2 - r^2 < 0,$$

et, par suite, $\lambda x_\mu{}^2$ est positif, ce qui exige que λ soit positif.

Nous avons supposé, pour établir ce résultat, que $r^2 - y^2 > 0$; il est évident que, les quantités λ étant indépendantes de x, de y et de r, la conclusion précédente subsiste dans tous les cas ; on a donc

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = N x^\varepsilon (x^2 + y^2 - r^2)^{n-\alpha} [x^2(1 + \lambda_1) + y^2 - r^2] \\ \times [x^2(1 + \lambda_2) + y^2 - r^2] \ldots [x^2(1 + \lambda_{\alpha'}) + y^2 - r^2].$$

En égalant à zéro $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$, on obtient un certain nombre de fois le cercle $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, l'axe de y si $\varepsilon \gtrless 0$, et enfin une série d'ellipses, dont les équations sont toutes de la forme

$$x^2(1 + \lambda) + y^2 - r^2 = 0,$$

qui ont pour grand axe le diamètre vertical du cercle, pour petit axe une portion du diamètre horizontal. Elles sont donc renfermées dans le cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Si maintenant on prend β fois la dérivée par rapport à y de

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha},$$

on obtient un polynôme en x et y de degré

$$2n - (\alpha + \beta).$$

Ce polynôme, considéré comme une fonction de y, provenant par β dérivations successives du polynôme en y^2, $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$ a, d'après le théorème II, tous ses zéros réels compris entre la plus grande et la plus petite racine réelle de l'équation

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Il est évident que la quantité $r^2 - x^2$ est supérieure à toutes les quantités de la forme

$$r^2 - x^2(1 + \lambda),$$

où λ est une quantité positive. Par suite, toutes les racines réelles de l'équation en y

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

sont comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2};$$

on a donc, en désignant par y_μ une racine réelle quelconque de cette équation,

$$y_\mu^2 < r^2 - x^2$$

ou bien

$$x^2 + y_\mu^2 - r^2 < 0;$$

les points de coordonnées x et y_μ sont donc situés à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Ce sont d'ailleurs les seules solutions réelles de l'équation ; car, si $r^2 - x^2 < 0$, toutes les racines en y de l'équation

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = 0$$

sont imaginaires, à l'exception de la racine $y = 0$, si elle s'y trouve.

6. Considérons maintenant la fonction plus complexe

$$V = (x^4 + y^4 - r^4)^n,$$

la dérivée d'ordre α de V,

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^4 + y^4 - r^4)^{n-\alpha} \varphi(x^4 + y^4 - r^4, x^4),$$

ε étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3 et

$$\varphi(x^4 + y^4 - r^4, x^4)$$

une fonction homogène des quantités $x^4 + y^4 - r^4$ et x^4, dont les coefficients sont indépendants de x, de y et de r.

On voit immédiatement que, si l'on prend les dérivées successives de $(x^4 + \alpha^4)^n$, ces dérivées sont de la forme

$$x^\varepsilon (x^4 + \alpha^4)^{n-\mu} \Theta(x^4),$$

ε étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3 et Θ une fonction de x^4 qui n'a que des permanences; l'équation obtenue en égalant à zéro l'une quelconque de ces dérivées a donc toutes ses racines imaginaires, excepté la racine $x = 0$.

Pour que les dérivées de $(x^4 + y^4 - r^4)^n$, égalées à zéro, aient des racines réelles, il faut donc que

$$r^4 - y^4 > 0.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}(x^4 + y^4 - r^4)^n &= [x^4 - (r^4 - y^4)]^n \\ &= (x^2 - \sqrt{r^4 - y^4})^n (x^2 + \sqrt{r^4 - y^4})^n,\end{aligned}$$

cette fonction rentrant dans le type de celles du théorème II.

On en conclut que l'équation

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = 0$$

a toutes ses racines réelles comprises entre

$$-\sqrt[4]{r^4-y^4} \quad \text{et} \quad +\sqrt[4]{r^4-y^4}:$$

et l'on en conclut aussi que

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = N x^\varepsilon (x^4+y^4-r^4)^{n-\alpha}$$
$$(x^4+y^4-r_4+\lambda_1 x^4)\ldots(x^4+y^4-r^4+\lambda_{\alpha'} x^4).$$

Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha'}$ sont réelles et positives ; la démonstration se fait comme dans le cas précédent.

En vertu d'un théorème plus général que nous énoncerons plus loin, si $\Phi(x)$ est un polynôme de la forme

$$\Phi(x) = (x^4-a_1^4)(x^4-a_2^4)\ldots$$
$$(x^4-a_n^4)(x^4+\alpha_1^4)\ldots(x^4+\alpha_p)^4,$$

les équations dérivées $\Phi^{(\mu)}(x)=0$ ont toutes leurs racines réelles comprises entre la plus grande et la plus petite racine de $\Phi(x)=0$, c'est-à-dire entre $-a_n$ et $+a_n$, si a_n est la plus grande des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En prenant les dérivées d'ordre β des deux membres de l'égalité

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^4+y^4-r^4)^{n-\alpha}$$
$$(x^4+y^4-r^4+\lambda_1 x^4)\ldots(x^4+y^4-r^4+\lambda_{\alpha'} x^4),$$

on obtient la fonction $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ qui, égalée à zéro, a toutes ses racines comprises entre $-\sqrt{r^4-x^4}$ et $+\sqrt{r^4-x^4}$, et, pour qu'elle ait des racines réelles, il faut que

$$r^4-x^4>0.$$

On en conclut, comme précédemment, que toutes les courbes

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

sont renfermées dans la courbe

$$x^4 + y^4 - r^4 = 0.$$

7. Si l'on considère la fonction

$$W = (x^{2m} + y^{2m} - r^{2m})^n,$$

l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} W}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

représente des courbes qui, abstraction faite des axes de coordonnées, sont toutes renfermées dans la courbe

$$x^{2m} + y^{2m} - r^{2m} = 0.$$

Cette proposition est une conséquence des théorèmes suivants :

I. *Si* $\Phi(x)$ *représente le polynôme*

$$\Phi(x) = (x^{2m} + a_1^{2m})(x^{2m} + a_2^{2m}) \ldots (x^{2m} + a_n^{2m}),$$

les racines de $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ *sont toutes imaginaires ;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont supposées des quantités réelles.*

II. *Si* $\Phi(x)$ *représente le polynôme*

$$\Phi(x) = (x^{2m} - a_1^{2m})(x^{2m} - a_2^{2m}) \ldots \\ (x^{2m} - a_n^{2m})(x^{2m} + \alpha_1^{2m}) \ldots (x^{2m} + \alpha_p^{2m}),$$

les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ *ont toutes leurs racines réelles comprises entre la plus grande et la plus petite racine réelle de* $\Phi(x) = 0$.

La démonstration de ces théorèmes est tout à fait analogue à celle des théorèmes du même genre que nous avons démontrés dans le cas de $m = 1$; nous n'insisterons pas pour éviter des longueurs et nous allons passer à une généralisation qui s'offre d'elle-même.

8. Considérons la fonction

$$U = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^n.$$

Je vais démontrer que les surfaces représentées par les équations

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0$$

sont, abstraction faite des plans coordonnés, toutes renfermées dans la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

En effet,

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{n-\alpha} \Phi(x, y, z)$$

$$(\varepsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 1).$$

On montrera, comme précédemment, que $\Phi(x, y, z)$ est de la forme

$$\Phi(x, y, z) = N(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 x^2)$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_2 x^2) \ldots (x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_{\alpha'} x^2),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha'}$ étant des quantités positives et N un nombre. $\Phi(x, y, z) = 0$ représente donc une série d'ellipsoïdes renfermés tous dans la sphère.

La fonction $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$ peut s'écrire aussi

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon [A_0 (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^\mu$$
$$+ A_1 x^2 (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{\mu-1} + \ldots + A_\mu x^{2\mu}].$$

Si l'on prend β fois la dérivée des deux membres par rapport à y, il viendra

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = x^\varepsilon y^\eta \left[\sum B (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^\nu x^{2p} y^{2q} \right],$$

η étant, comme ε, zéro ou un, et la somme $2\nu + 2p + 2q$

étant la même pour tous les termes du polynôme qui figure dans le second membre.

Les racines de l'équation en y, représentée par

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0.$$

sont, d'après les théorèmes démontrés, toutes comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2 - z^2},$$

si elles sont réelles.

Elles sont toutes imaginaires si $r^2 - x^2 - z^2 < 0$.

Le polynôme

$$\frac{1}{x^\varepsilon y^\eta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

étant homogène en $x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, x^2 et y^2, si l'on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = -\lambda' y^2,$$

l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

devient

$$\sum B \lambda'^\nu \left(\frac{x}{y}\right)^{2p} = 0.$$

Dans cette équation, la quantité λ' est indépendante de z, et l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = -\lambda' y^2$ montre que les quantités λ' sont positives. On pourra alors poser

$$\sum B(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^\nu x^{2p} y^{2q} = N'(x^2 + y_2 + z^2 - r^2)^{n-\alpha-\beta}$$
$$\times (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda'_1 y^2) \ldots (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda'_{\beta'} y^2);$$

les quantités λ'_1, λ'_2, ... sont des fonctions de x et de y seulement, et elles sont positives. En prenant γ fois la dérivée par rapport à z, on obtiendra une expression qui, égalée à zéro, aura ses racines réelles comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,;$$

elles satisfont donc à la condition

$$z^2 < r^2 + x^2 - y^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 < 0.$$

Les points réels représentés par l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\nu} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\nu} = 0$$

sont donc tous renfermés dans la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

à l'exception de ceux qui sont donnés par les équations

$$x^\xi = 0, \quad y^\eta = 0, \quad z^\zeta = 0.$$

La même proposition s'étend aux surfaces tirées par dérivation de l'expression

$$(x^{2m} + y^{2m} + z^{2m} - r^{2m})^n.$$