NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Les lignes barycentriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 511-520

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__511_0>

LES LIGNES BARYCENTRIQUES;

PAR M. E. CESARO.

1. Appelons *barycentrique* d'une courbe (M) le lieu des centres de gravité des arcs de la courbe, comptés à partir d'un point fixe. En faisant varier l'origine des arcs, on obtient, pour une même ligne, une infinité de barycentriques. Supposons d'abord que la ligne (M) soit plane, et considérons une barycentrique déterminée (G). Si x et y sont les coordonnées du barycentre G, relativement à la tangente et à la normale à (M), en M, on a, d'après ce qui a été dit dans l'article *Sur les lignes de poursuite,* et en adoptant les notations de l'article *Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques,*

$$(1) \qquad \frac{\delta x}{ds} = -\frac{x}{s}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{y}{s};$$

car le point G *poursuit* constamment M, avec une vitesse qui est à celle de M comme la distance MG est au chemin parcouru par M. Par conséquent,

$$(2) \qquad \frac{d(sx)}{ds} = \frac{sy}{\rho} - s, \qquad \frac{d(sy)}{ds} = -\frac{sx}{\rho}.$$

Outre le centre de gravité, il y a une double infinité de points, dont les coordonnées vérifient ces relations : ils constituent le *système de poursuite* barycentrique ou, plus simplement, le système barycentrique dont (M) est la ligne fondamentale.

2. Soit P un point du système, et désignons par α, β ses coordonnées. Les coordonnées d'un autre point Q

pourront prendre la forme

$$x = \alpha + u \cos\omega, \qquad y = \beta + u \sin\omega,$$

où l'on doit chercher à déterminer u et ω, de manière à satisfaire aux conditions (2). On trouve

$$\frac{d(su)}{ds} = 0, \qquad \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\rho}.$$

La dernière égalité montre que la direction PQ est invariable, et la première nous dit que la distance PQ varie en raison inverse de s. Il en résulte que le système barycentrique se déplace parallèlement à lui-même, en se retrécissant toujours, de manière que les distances mutuelles de ses points varient en raison inverse du chemin décrit par M sur la ligne fondamentale. L'ensemble des trajectoires de tous les points du système sera appelé *faisceau barycentrique* de la ligne (M), relativement à l'origine des arcs. Par exemple, les faisceaux barycentriques d'une droite D sont les faisceaux de droites, qui ont leurs centres sur D et sont superposés une infinité de fois à eux-mêmes.

3. La *clothoïde* est une ligne plane, dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. En coordonnées intrinsèques, son équation est donc $\rho s = a^2$. Cela étant, voyons s'il est possible de déterminer une ligne dont les centres de courbure fassent partie du système barycentrique. Pour que les conditions (2) soient remplies lorsque $x = 0$, $y = \rho$, il faut et il suffit que le produit ρs soit constant. Donc *la développée de la clothoïde appartient au faisceau barycentrique de cette ligne,* relatif au point de nulle courbure O. Cela nous permet de déterminer le centre de gravité d'un arc OM de clothoïde. Soient, en effet, G le centre de gravité et C

le centre de courbure au point M. Nous savons que la droite CG se déplace parallèlement à elle-même : elle est donc parallèle à la normale à la courbe, menée par O; car, en ce point, G se confond avec O. Par cette raison même, dans la position initiale, la distance CG, bien qu'infinie, est certainement exprimée par ρ : elle sera donc toujours mesurée par ρ, puisqu'elle doit varier en raison inverse de l'arc. En d'autres termes, G est constamment situé sur la circonférence osculatrice. Conséquemment, *le centre de gravité d'un arc de clothoïde, compté à partir du point de nulle courbure* O *jusqu'à un point quelconque* M, *est un point de la circonférence osculatrice en* M *à la courbe, situé sur le diamètre perpendiculaire à la tangente en* O. On démontre aussi très facilement que *la distance* GM, *comptée sur la circonférence osculatrice, est la moitié de l'arc de clothoïde* OM.

4. La clothoïde s'étend sans singularités depuis le point de nulle courbure et s'enroule autour d'un point asymptotique à courbure infinie, centre de gravité de toute la courbe et centre du faisceau barycentrique. La barycentrique de la clothoïde, au contraire, admet une infinité de points de rebroussement, situés sur la clothoïde : chacun d'eux jouit de la propriété d'être simultanément extrémité et barycentre d'un arc de clothoïde, dont l'autre extrémité est toujours le point de nulle courbure. A partir de ce point, les rebroussements de la barycentrique se succèdent de plus en plus fréquemment et partagent la courbe en une infinité de boucles, dont les longueurs vont en diminuant comme les termes de la série $1, \sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, \ldots$. La clothoïde est douée d'un grand nombre d'autres propriétés intéressantes. Citons-en une : *Si une clothoïde, de pa-*

ramètre a, est appliquée, par simple torsion, sur une sphère de rayon a, sa torsion varie comme la courbure de la développée d'une chaînette d'égale résistance. Nous devons rappeler ici que la *chaînette d'égale résistance,* étudiée par M. E. Collignon, est représentée par l'équation

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

de sorte qu'elle est caractérisée par la propriété suivante : *Si une chaînette d'égale résistance roule sur une droite, le centre de courbure correspondant au point de contact décrit une chaînette* ordinaire, qui admet pour directrice la droite considérée. On sait, en outre, que la *voûte sans surcharge,* proposée par Yvon Villarceau, s'obtient en renversant une chaînette d'égale résistance. Enfin, il est évident que, *lorsqu'une clothoïde roule sur une droite, le centre de courbure, correspondant au point de contact, reste sur une hyperbole équilatère,* asymptotique à la droite considérée.

5. On distingue aisément le centre de gravité, dans la double infinité des points satisfaisant à (2). Il suffit d'intégrer ces équations, en supposant $x = 0, y = 0$, pour $s = 0$. La question se ramène immédiatement à l'intégration de l'équation

$$\rho \frac{d(sz)}{ds} + isz + \rho s = 0,$$

où

$$z = x + iy, \qquad i^2 + 1 = 0.$$

Si l'on fait sz égal au produit de deux fonctions, dont on dispose convenablement, on trouve, en intégrant et en supposant $z = 0$ pour $s = 0$, une équation qui se dédouble en

$$(3) \qquad x = \xi \cos\theta - \eta \sin\theta, \qquad y = -\xi \sin\theta + \eta \cos\theta,$$

où l'on a posé

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \int_0^s \frac{ds}{\rho}, \\ -s\xi &= \int_0^s s \cos\theta \, ds, \\ -s\eta &= \int_0^s s \sin\theta \, ds \end{aligned} \right.$$

Si, par exemple, $\rho s = a^2$, les équations (4) donnent d'abord

$$\theta = \frac{s^2}{2a^2}, \qquad \xi = -\rho \sin\theta, \qquad \eta = -\rho(1 - \cos\theta);$$

puis, par substitution dans (3),

$$x = -\rho \sin\theta, \qquad y = \rho(1 - \cos\theta),$$

ce qui confirme les propriétés énoncées précédemment.

6. Quand on a trouvé, au moyen des formules (3), les valeurs de x et y en fonction de s, on obtient, en éliminant cette variable, l'équation de la ligne que le centre de gravité semble décrire par rapport aux axes mobiles. Mais, si l'on veut connaître la trajectoire absolue du centre de gravité, dans le plan de (M), on doit recourir aux formules (1). On trouve aisément que les coordonnées intrinsèques de la barycentrique cherchée sont données par les formules

$$s_0 = \int_0^s (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s}, \qquad \rho_0 = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{sy}.$$

Ainsi, dans le cas de la clothoïde, on a

$$s_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta\sqrt{\theta}} \, d\theta, \qquad \rho_0 = a\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta\sqrt{\theta}}.$$

Il faudrait éliminer θ entre ces égalités pour obtenir l'équation intrinsèque demandée. Si l'on veut éviter une intégration, on peut dire que la barycentrique de la clothoïde, relativement au point de nulle courbure, est une développante de la courbe représentée par les équations simultanées

$$s = \frac{a \sin\varphi}{2\varphi\sqrt{\varphi}}, \qquad \rho = \frac{a(2\varphi\cos\varphi - 3\sin\varphi)}{4\varphi^2\sqrt{\varphi}}.$$

7. On généralise aisément les considérations qui précèdent, en supposant que la ligne (M) soit matérialisée suivant une certaine loi, c'est-à-dire que chacun de ses éléments soit chargé d'un poids $q\,ds$, où q est une fonction déterminée de s. La propriété de la *translation parallèle du système de poursuite* subsiste toujours; mais la *variation des distances mutuelles des points du système* se laisse régir par d'autres lois. On obtient, en général,

$$u = e^{-\int \frac{q\,ds}{s}}.$$

En particulier, pour $q = 1$, on voit que le produit su est constant, et l'on retrouve ainsi les résultats qui précèdent. Si $q = \frac{1}{\rho}$, le point G est appelé, d'après Steiner, *barycentre de courbure* de l'arc s. Ce point est très facile à construire lorsqu'il s'agit des courbes définies par l'équation générale

$$\rho = cs^n.$$

On a, pour $n = 1$, la *spirale logarithmique;* pour $n = -1$, la *clothoïde;* pour $n = 0$, le *cercle;* pour $n = \frac{1}{2}$, la *développante de cercle;* etc. Pour toutes ces courbes, si l'on veut avoir le barycentre de courbure d'un arc compris entre l'origine O et un point quelconque M, on doit chercher d'abord les points C, D, qui correspondent à M sur la développée et sur la développante de (M) : *Le barycentre de courbure de l'arc* OM *est l'intersection des perpendiculaires abaissées respectivement des points* M, C *sur les droites* OD, OM. En particulier, tout arc de spirale logarithmique, ayant une extrémité au pôle, admet ce point pour barycentre de courbure. Enfin, si l'on veut que (G) soit la développée de (M), on doit prendre

$$q = -\frac{s\,d\rho}{\rho\,ds}.$$

Les systèmes de poursuite, relatifs à ce cas particulier, se déplacent parallèlement à eux-mêmes, comme cela arrive en général; mais les distances mutuelles de leurs points varient proportionnellement au rayon de courbure de la trajectoire fondamentale.

8. Pour la recherche des barycentriques des lignes à double courbure, les formules fondamentales sont

$$(5) \qquad \frac{\delta x}{ds} = -\frac{x}{s}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{y}{s}, \qquad \frac{\delta z}{ds} = -\frac{z}{s},$$

et, par suite, on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(sx)}{ds} &= \frac{sz}{\rho} - s, \\ \frac{d(sy)}{ds} &= \frac{sz}{r}, \\ \frac{d(sz)}{ds} &= -\frac{sx}{\rho} - \frac{sy}{r}. \end{aligned} \right.$$

La triple infinité de points, remplissant ces conditions, constitue le système barycentrique de la ligne (M). Si α, β, γ sont les coordonnées de l'un de ces points, les coordonnées de tout autre point du système sont

$$x = \alpha + \lambda u, \qquad y = \beta + \mu u, \qquad z = \gamma + \nu u,$$

où l'on doit déterminer la distance u et les cosinus directeurs λ, μ, ν, de manière que les équations (6) soient vérifiées. Pour cela, il faut que l'on ait

$$\frac{d(\lambda su)}{ds} = \frac{\nu su}{\rho},$$
$$\frac{d(\mu su)}{ds} = \frac{\nu su}{r},$$
$$\frac{d(\nu su)}{ds} = -\frac{\lambda su}{\rho} - \frac{\mu su}{r}.$$

Ces équations, multipliées respectivement par λsu, μsu, νsu, et additionnées, montrent que *le produit su est constant*. Par suite,

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\nu}{\rho}, \qquad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\nu}{r}, \qquad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\mu}{r},$$

c'est-à-dire que *la direction* (λ, μ, ν) *est invariable*. Le système barycentrique d'une ligne à double courbure se transporte donc parallèlement à lui-même dans l'espace, pendant que les distances mutuelles de ses points varient en raison inverse du chemin parcouru par le point M sur la trajectoire fondamentale.

9. Enfin, les formules (5) permettent de calculer les rayons de courbure de la barycentrique, en fonction des coordonnées x, y, z, du centre de gravité, que l'on suppose connues; car il est facile de les déterminer au moyen des équations (6) et des conditions $x = y = z = 0$ pour $s = 0$. On a d'abord

$$(7) \qquad s_0 = \int_0^s \frac{u\,ds}{s},$$

où

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ensuite les cosinus directeurs de la tangente à (G) sont

$$a = -\frac{x}{u}, \qquad b = -\frac{y}{u}, \qquad c = -\frac{z}{u}.$$

On en déduit

$$\frac{\delta a}{ds} = \frac{y^2 - z^2}{u^3}, \qquad \frac{\delta b}{ds} = -\frac{xy}{u^3}, \qquad \frac{\delta c}{ds} = -\frac{xz}{u^3}.$$

En élevant au carré et en ajoutant, on obtient sans peine, comme expression du premier rayon de courbure,

$$\rho_0 = \frac{u^3}{s\sqrt{y^2 + z^2}}. \tag{8}$$

En outre, les dernières formules montrent que les cosinus directeurs de la normale principale sont donnés par les égalités

$$f = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{u}, \qquad g = -\frac{xy}{u\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad h = -\frac{xz}{u\sqrt{y^2 + z^2}},$$

et, par suite, ceux de la binormale sont

$$l = 0, \qquad m = -\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad n = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

D'après cela, le plan osculateur à (G) passe par la tangente à (M). Enfin, on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{ds} &= -\frac{y}{\rho\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ \frac{\delta m}{ds} &= \frac{xy}{y^2 + z^2}\,\frac{y}{\rho\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ \frac{\delta n}{ds} &= \frac{xz}{y^2 + z^2}\,\frac{y}{\rho\sqrt{y^2 + z^2}}, \end{aligned}$$

et, par suite, le rayon de torsion est

$$r_0 = \frac{\rho(y^2 + z^2)}{sy} \tag{9}$$

Par substitution de x, y, ..., en fonction de s, dans les formules (7), (8), (9), et par élimination de s, on parvient aux équations intrinsèques de la courbe (G). D'ailleurs, il est évident que les formules précédentes sont applicables à toutes les courbes, qui appartiennent au faisceau barycentrique de la trajectoire considérée.