

E. CESÀRO

Transformations algébriques par le calcul des différences

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 489-492

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__489_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATIONS ALGÈBRIQUES PAR LE CALCUL DES DIFFÉRENCES;

PAR M. E. CESARO.

Nous nous proposons de représenter la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

au moyen des différences successives du premier terme de la série arbitraire

$$(1) \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \dots$$

Ayant posé, à cet effet,

$$A_i = a_i u_i, \quad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i x^i,$$

nous pourrons écrire, symboliquement,

$$(2) \quad F(x) = f(ux) = f(x + x\Delta) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{x^i f^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(u_0).$$

Supposons, par exemple, que la série (1) soit

$$0^r, \quad 1^r, \quad 2^r, \quad 3^r, \quad 4^r, \quad \dots,$$

r étant entier. Le second membre de (2) s'arrête alors naturellement au $(r+1)^{\text{ième}}$ terme, et l'on peut écrire

$$(3) \quad F(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i f^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(0^r).$$

Du reste, si la série (1) est, d'une manière générale,

$$U(z), \quad U(z+h), \quad U(z+2h), \quad U(z+3h), \quad \dots$$

il est presque évident que l'on a, sous forme symbolique,

$$F(x) = U(x + Nh),$$

en supposant que N_r représente le second membre de (3).

Appliquons la formule (3) aux fonctions telles que

Ici
$$Q_r(x) = 1^r x + 2^r x^2 + 3^r x^3 + 4^r x^4 + \dots$$

$$a_i = 1, \quad f(x) = \frac{1}{1-x},$$

et l'on obtient immédiatement la relation connue

$$Q_r(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i \Delta^i(0^r)}{(1-x)^{i+1}},$$

qui donne, pour les nombres de Bernoulli ⁽¹⁾, l'expression suivante :

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i+1}} \Delta^i(0^{r-1}).$$

Soit, pour généraliser,

$$a_i = i^s, \quad f(x) = Q_s(x).$$

La formule (3) devient

$$(4) \quad Q_{r+s}(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i Q_s^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(0^r).$$

Ainsi, pour $s = 1$, on trouve

$$Q_{r+1}(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{(i+x)x^i}{(1-x)^{i+2}} \Delta^i(0^r).$$

En particulier,

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-3} \frac{(-1)^i i}{2^{i+3}} \Delta^{i+1}(0^{r-2}).$$

(1) Voir notre article *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*.

De même, pour $s = 2$, on arrive à la formule

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-3} \frac{(-1)^{i-1} i(i-3)}{2^{i+3}} \Delta^i(o^{r-3}); \quad \text{etc.}$$

On établit autrement la formule (4) en partant de l'égalité

$$Q^{r+s} = Q^r Q^s = Q^s [1 + \Delta(o^r)]^Q;$$

d'où l'on déduit (4), en développant, suivant les puissances de Δ , et en observant que l'on a, sous forme symbolique,

$$x^i Q_s^{(i)}(x) = Q^{s+1}(Q-1)(Q-2)\dots(Q-i+1).$$

Reprenons l'égalité (3) et remplaçons-y la limite supérieure de i par un nombre quelconque $n \geq r$. Posons

$$(5) \quad \varphi_i(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{t^i f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Pour effectuer le retour aux nombres u , remarquons que l'égalité (3) devient

$$(6) \quad F(x) = \varphi_i(x\Delta) = \varphi_i(ux - x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i^r x^i}{i!} \varphi_i^{(i)}(-x).$$

Si, par exemple, on fait $a_i = 1$, la formule (5) donne d'abord

$$\varphi_i(t-x) = \frac{1}{1-t} \left[1 - \left(\frac{x-t}{x-1} \right)^{n+1} \right];$$

d'où l'on déduit, en développant suivant les puissances de t ,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i^{(i)}(-x)}{i!} &= 1 - \left(\frac{x}{x-1} \right)^{n+1} \\ &\times \left(1 - \frac{C_{n+1,1}}{x} + \frac{C_{n+1,2}}{x^2} - \dots \pm \frac{C_{n+1,i}}{x^i} \right). \end{aligned}$$

Si l'on porte ce résultat dans la formule (6), on ob-

tient une nouvelle expression des fonctions Q, considérées précédemment. En particulier, pour $x = -1$, on a

$$B_r = \frac{r}{2^n(2^r-1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} i^{r-1} \\ \times (1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n-i-1}),$$

pourvu que $n \geq r$. Sous une autre forme,

$$B_r = \frac{r}{2^n(2^r-1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (C_{n,n-i-1}(1^{r-1} - 2^{r-1} + 3^{r-1} - \dots \pm i^{r-1})).$$

On trouve, pour les nombres de Bernoulli, d'autres expressions analogues, si l'on prend successivement $a_i = i, i^2, i^3, \dots$. Les formules démontrées dans cet article donnent, d'ailleurs, une foule d'autres résultats, plus ou moins intéressants, qui constituent toujours d'utiles exercices de calcul.

Note. — La formule principale de notre article *Dérivées des fonctions de fonctions* a été précédemment découverte par M. R. Hoppe, en 1845. Une formule plus générale, concernant les dérivées d'une fonction quelconque de *plusieurs* fonctions de x , a été publiée par M. G. Teixeira, dans le *Journal de Battaglini*, en 1880. Nous donnerons, de cette dernière formule, une démonstration fort simple, basée sur l'emploi de nos signes algorithmiques, et nous chercherons aussi à opérer l'*inversion de la formule de Hoppe*, comme nous l'avons déjà fait, du reste, dans certains cas particuliers.
