

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 47-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__47_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

*Extrait d'une Lettre de M. le Dr Louis Saalschütz,
professeur extraord. de l'Université de Königsberg.*

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. IV, 3^e série, p. 57, se trouve un petit Mémoire de M. Hermite sur une identité trigonométrique, dans lequel le grand analyste démontre un résultat de M. Glaisher en

lui donnant en même temps une plus grande extension. Mais la formule employée par M. Hermite, dont l'origine est due à Cauchy, permet d'ajouter une autre relation trigonométrique encore inconnue, comme je le crois.

Soit donc

$$(1) \quad f(x) = \frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\dots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_n)};$$

d'où l'on tire, en faisant $\xi = e^{ix}$, $\xi^2 = t$,

$$(2) \quad f(x) = F(t) = \frac{(te^{-b_1t} - e^{b_1t})(te^{-b_2t} - e^{b_2t})\dots(te^{-b_nt} - e^{b_nt})}{(te^{-a_1t} - e^{a_1t})(te^{-a_2t} - e^{a_2t})\dots(te^{-a_nt} - e^{a_nt})}.$$

Maintenant la formule connue de Cauchy énoncée

$$(3) \quad F(t) = \sum \text{rés} \frac{F(z)}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z)}{z-t} dz.$$

L'intégrale prise autour d'une assez grande partie du plan enfermant au moins tous les points où $F(z)$ devient infini et dont la circonférence est fermée par une courbe quelconque. Mais, si nous posons

$$e^{2a_1t} = \alpha_1, \quad e^{2a_2t} = \alpha_2, \quad \dots, \quad e^{2a_nt} = \alpha_n,$$

nous pouvons écrire

$$(4) \quad \frac{F(z)}{z-t} = \frac{(ze^{-b_1t} - e^{b_1t})(ze^{-b_2t} - e^{b_2t})\dots(ze^{-b_nt} - e^{b_nt})}{(z-t)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n) e^{-(a_1+a_2+\dots+a_n)t}},$$

et le résidu de cette fonction correspondant au pôle $z = \alpha$, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{z-\alpha_1}$ près de $z = \alpha_1$, se trouve

$$= \frac{(\alpha_1 e^{-b_1t} - e^{b_1t})(\alpha_1 e^{-b_2t} - e^{b_2t})\dots(\alpha_1 e^{-b_nt} - e^{b_nt})}{(\alpha_1 - t)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\dots(\alpha_1 - \alpha_n) e^{-(a_1+a_2+\dots+a_n)t}}$$

ou, en multipliant le numérateur et le dénominateur

par $e^{-na_1 t}$,

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &= \frac{(e^{(a_1-b_1)t} - e^{-(a_1-b_1)t}) \dots (e^{(a_1-b_n)t} - e^{-(a_1-b_n)t})}{(a_1-t)(e^{(a_1-a_2)t} - e^{-(a_1-a_2)t}) \dots (e^{(a_1-a_n)t} - e^{-(a_1-a_n)t}) e^{-2a_1 t}}, \\ &= \frac{\sin(a_1-b_1) \sin(a_1-b_2) \dots \sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2) \sin(a_1-a_3) \dots \sin(a_1-a_n)} \frac{2ix}{a_1-t}. \end{aligned} \right.$$

En conséquence de cette expression et des expressions pareilles pour $a_2, a_3, \dots, a_n$, on trouve la somme des résidus de $\frac{F(z)}{t-z}$, si l'on désigne, pour abréger,

$$(6) \sum \text{res} \frac{F(z)}{t-z} = -2i \left(\frac{A_1 a_1}{a_1-t} + \frac{A_2 a_2}{a_2-t} - \dots + \frac{A_n a_n}{a_n-t} \right).$$

$\frac{\sin(a_1-b_1) \sin(a_2-b_2) \dots \sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2) \sin(a_1-a_3) \dots \sin(a_1-a_n)} \quad \text{par } A_1,$
 $\frac{\sin(a_2-b_1) \sin(a_2-b_2) \dots \sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1) \sin(a_2-a_3) \dots \sin(a_2-a_n)} \quad \text{par } A_2,$
 $\dots \dots \dots$

Considérons maintenant l'intégrale de la formule (3)

$$Y = \int \frac{F(z)}{z-t} dz.$$

Par la substitution qui suppose la circonférence comme cercle

$$z = R e^{i\varphi},$$

et, en prenant R très grand, il résulte de la formule (2)

$$F(z) = \frac{e^{-(b_1+b_2+\dots+b_n)t}}{e^{-(a_1+a_2+\dots+a_n)t}} = e^{(a_1+a_2+\dots+a_n-b_1-b_2-\dots-b_n)t},$$

et, puisque la quantité t peut être supprimée en face de z , on a

$$\frac{dz}{z} = i d\varphi,$$

et, par là, en intégrant autour du cercle ayant le

rayon R,

$$(7) \quad Y = \int_0^{2\pi} \frac{F(z) dz}{z} = 2i\tau [\cos(s) - i \sin(s)],$$

où s est écrit au lieu de

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n - b_1 - b_2 - \dots - b_n).$$

En combinant les formules (6) et (7), nous recevons de (3)

$$(8) \quad \begin{cases} F(t) = -2i \left(\frac{\Lambda_1 z_1}{z_1 - t} + \frac{\Lambda_2 z_2}{z_2 - t} + \dots + \frac{\Lambda_n z_n}{z_n - t} \right) \\ \quad + \cos(s) + i \sin(s). \end{cases}$$

Mais

$$\frac{z_1}{z_1 - t} = \frac{e^{2a_1 t}}{e^{2a_1 t} - e^{2x t}};$$

d'où l'on conclut facilement, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $(e^{-2a_1 t} - e^{-2x t})$,

$$\frac{z_1}{z_1 - t} = \frac{1}{2} [1 - i \cot(a_1 - x)],$$

de même

$$\frac{z_2}{z_2 - t} = \frac{1}{2} [1 - i \cot(a_2 - x)], \quad \dots$$

Par cela, il vient de (7)

$$(9) \quad \begin{cases} F(t) = f(x) = -\Lambda_1 \cot(a_1 - x) - \Lambda_2 \cot(a_2 - x) - \dots \\ \quad - \Lambda_n \cot(a_n - x) + \cos(s) \\ \quad - i[\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_n - \sin(s)]; \end{cases}$$

ce qui donne, si l'on sépare ce qui est réel de ce qui est imaginaire,

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\sin(a_1 - b_1) \sin(a_1 - b_2) \dots \sin(a_1 - b_n)}{\sin(a_1 - a_2) \sin(a_1 - a_3) \dots \sin(a_1 - a_n)} + \dots \\ \quad - \frac{\sin(a_n - b_1) \sin(a_n - b_2) \dots \sin(a_n - b_n)}{\sin(a_n - a_1) \sin(a_n - a_2) \dots \sin(a_n - a_{n-1})} \\ \quad = \sin(a_1 + a_2 + \dots + a_n - b_1 - b_2 - \dots - b_n), \end{cases}$$

alors nous aurons

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(x+b_1)\cos(x+b_2)\dots\cos(x+b_n)}{\cos(x+a_1)\cos(x+a_2)\dots\cos(x+a_n)} \\ &= \frac{\sin(a_1-b_1)\dots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\dots\sin(a_1-a_n)} \tan(x+a_1) \\ &- \frac{\sin(a_2-b_1)\dots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\dots\sin(a_2-a_n)} \tan(x+a_2) \\ &- \dots\dots\dots \\ &+ \frac{\sin(a_n-b_1)\dots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\dots\sin(a_n-a_{n-1})} \tan(x+a_n) \\ &+ \cos(a_1+a_2+\dots+a_n-b_1-b_2-\dots-b_n). \end{aligned} \right.$$

Si nous écrivons enfin, dans cette formule, $\frac{x}{r}, \frac{a_1}{r}, \frac{a_2}{r}, \dots, \frac{b_1}{r}, \frac{b_2}{r}, \dots$ pour $x, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, le nombre r croissant jusqu'à l'infini, elle produira

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(a_1-b_2)(a_1-b_3)\dots(a_1-b_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)} (a_1-b_1)(a_1+x) \\ &+ \frac{(a_2-b_1)(a_2-b_3)\dots(a_2-b_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)} (a_2-b_2)(a_2+x)+\dots \\ &+ \frac{(a_n-b_1)(a_n-b_2)\dots(a_n-b_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})} (a_n-b_n)(a_n+x) \\ &= \frac{1}{2} \{ (a_1-b_1)(a_1-b_1+2x) \\ &+ (a_2-b_2)(a_2-b_2+2x) \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ (a_n-b_n)(a_n-b_n+2x) \\ &+ [(a_1-b_1)-(a_2-b_2)+\dots-(a_n-b_n)]^2 \}. \end{aligned} \right.$$

Voilà une formule algébrique qui contient deux relations en comparant les coefficients de x^0 et de x . En appliquant la même méthode aux formules (11) et (12), il en sortira des identités eulériennes très connues.