

F. GOMES TEIXEIRA

Sur une formule d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 36-39

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__36_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FORMULE D'ANALYSE;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

Professeur à l'École polytechnique de Porto, ancien professeur
à l'Université de Coimbra.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, que je crois nouveau :

Si les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ et leurs dérivées $f'(x)$, $F'(x)$, $f''(x)$, $F''(x)$, $\dots$, $f^m(x)$, $F^m(x)$ sont finies et déterminées pour toutes les valeurs de x qui sont comprises dans l'intervalle (x_0, x) , nous avons la formule

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\ F(x) - F(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0) \\ \hline \frac{(x-x_0)^{i+1}}{(i+1)!} - \dots - \frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0) + R \\ \hline \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x_0) - R' \end{array} \right. ,$$

où

$$R = \frac{(x-x_0)(1-\theta)^{m-1} f^m[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(m-1)!},$$

$$R' = \frac{(x-x_0)(1-\theta)^{n-1} F^n[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n-1)!},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Pour démontrer ce théorème, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\ & - f(z) - \frac{x - z}{1} f'(z) - \dots - \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(z) \\ & - \left[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0) \right. \\ & \quad \left. - F(z) - (x - z) F'(z) - \dots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(z) \right] \\ & \times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)}. \end{aligned}$$

En lui appliquant la formule connue

$$(2) \quad \varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi' [x_0 + \theta(x - x_0)],$$

on trouve le résultat

$$\begin{aligned} 0 = & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\ & - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0) \\ & - \left[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0) \right. \\ & \quad \left. - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x_0) \right] \\ & \times \frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} \\ & + (x - x_0) \left\{ - \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)!} f^m [x_0 + \theta(x - x_0)] \right. \\ & \quad \left. + \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} F^n [x_0 + \theta(x - x_0)] \right\} \\ & \times \frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)}. \end{aligned}$$

De cette formule, on tire la formule (1) que nous voulions démontrer, en supposant

$$m \geq i - 1, \quad n \geq k + 1.$$

I. Si l'on pose, dans la formule (1),

$$F(x) = (x - x_0)^n, \quad k = n - 1, \quad i = m - 1,$$

et, par conséquent,

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad F^{n-1}(x_0) = 0,$$

$$F^n(x_0) = n!, \quad F^n[x_0 + \theta(x - x_0)] = n!,$$

on a

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0)}{(x - x_0)^n} \\ &= \frac{(n-1)! (x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-1} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n! (m-1)! (x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1} F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]} \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0) \\ &+ \frac{(x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-n}}{(m-1)! n} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi donc la formule de Taylor avec l'expression du reste de MM. Schlörmich et Roche.

II. Si l'on pose, dans la formule (1), $i = k = n - 1$, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{n-1} f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}}{F(x) - F(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{n-1} F^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}} \\ &= \frac{f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}. \end{aligned}$$

On peut voir cette formule dans le *Cours de Calcul infinitésimal* de M. Houël, où elle est démontrée au moyen d'intégrations.

III. Si l'on a

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{n-1}(x_0) = 0, \\ F'(x_0) = 0, \quad F''(x_0) = 0, \quad \dots, \quad F^{n-1}(x_0) = 0, \end{aligned}$$

il vient la formule bien connue

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{F(x) - F(x_0)} = \frac{f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}.$$