

J.-B. POMEY

Sur la limite de $\sum_1^n \frac{1}{p} - \sum_1^m \frac{1}{q}$, lorsque p et q parcourent toutes les valeurs entières positives jusqu'à n et m respectivement, et que n et m augmentent indéfiniment, tandis que leur rapport tend vers une limite déterminée

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5 (1886), p. 348-352

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5_348_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA LIMITE DE $\sum_1^n \frac{1}{p} - \sum_1^m \frac{1}{q}$, LORSQUE p ET q PAR-
COURENT TOUTES LES VALEURS ENTIÈRES POSITIVES JUS-
QU'A n ET m RESPECTIVEMENT, ET QUE n ET m AUGMEN-
TENT INDÉFINIMENT, TANDIS QUE LEUR RAPPORT TEND
VERS UNE LIMITE DÉTERMINÉE ;**

PAR M. J.-B. POMEY.

Je considère la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Soient S_m la somme de ses m premiers et S_n la somme de ses n premiers termes. Je suppose que m et n tendent vers l'infini, n restant supérieur à m , et le rapport $\frac{n}{m}$ restant fini. Alors on a

$$\lim(S_n - S_m) = \log \left(\frac{n}{m} \right),$$

en mettant $\left(\frac{n}{m} \right)$ pour $\lim \frac{n}{m}$.

On peut le démontrer ainsi : $S_n - S_m$ est la limite de

$$\frac{1}{(n+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\rho}} + \dots + \frac{1}{m^{1+\rho}},$$

pour $\rho = 0$. Supposons ρ positif; la série $\sum \frac{1}{i^{1+\rho}}$, i parcourant toutes les valeurs entières positives, est conver-

gente, et l'on peut écrire

$$S_n - S_m = \lim \left[\frac{1}{(n+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\rho}} + \dots \right] \\ - \lim \left[\frac{1}{(m+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(m+2)^{1+\rho}} + \dots \right].$$

Je vais calculer chacune de ces limites.

Soit $y = \frac{1}{x^{1+\rho}}$ une courbe rapportée à deux axes rectangulaires. J'ai

$$\int_i^{+\infty} y \, dx = \frac{1}{\rho i^\rho}.$$

Or la valeur de cette intégrale est représentée par l'aire comprise, du côté des x positifs, entre l'axe des x , la courbe et l'ordonnée $x = i$.

Considérons les rectangles qui ont pour côtés respectivement les ordonnées des points dont les abscisses sont $x = i, i+1, \dots$, et les distances égales à 1 qui séparent ces ordonnées.

Il suffit de faire la figure pour voir clairement que l'aire de ces rectangles sera au total supérieure à l'aire $\int_i^{+\infty} y \, dx$. La somme des aires de ces rectangles est

$$\frac{1}{i^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} + \dots$$

Si nous considérons de même les rectangles qui ont pour côtés les ordonnées des points dont les abscisses sont $i+1, i+2, \dots$, et les distances égales à 1 qui séparent les ordonnées $x = i+1$ et $x = i, x = i+2$ et $x = i+1, \dots$, la somme des aires de ces rectangles sera égale à

$$\frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+2)^{1+\rho}} + \dots,$$

et sera inférieure à la même aire $\int_i^{+\infty} y \, dx = \frac{1}{\rho i^\rho}$.

Donc $\int_i^\infty y \, dx$ sera compris entre les aires des deux séries de rectangles, et l'on peut poser

$$\frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} - \frac{1}{(i+2)^{1+\rho}} + \dots = \frac{1}{\rho i^\rho} - \theta \frac{1}{i^{1+\rho}},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Il en résulte que, θ_1 étant de même compris entre 0 et 1, on aura

$$S_n - S_m = \left[\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho m^\rho} - \frac{1}{\rho n^\rho} \right) - \theta_1 \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{n^{1+\rho}} \right) \right],$$

m et n étant infinis.

Je passe à la limite pour $\rho = 0$ et j'ai à trouver la limite de

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{m} \right)^\rho - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{n} \right)^\rho.$$

Nous aurons le résultat en considérant le rapport des dérivées en ρ , il reste

$$\left(\frac{1}{m} \right)^\rho \log \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{n} \right)^\rho \log \frac{1}{n}.$$

Donc, pour $\rho = 0$, il reste

$$S_n - S_m = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left[\log \left(\frac{n}{m} \right) - \theta_1 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \right] = \log \left(\frac{n}{m} \right).$$

C. Q. F. D.

Autre démonstration. — Si l'on considère $\int_m^n \frac{dx}{x}$, c'est l'aire comprise entre l'axe des x , les ordonnées $x = m$, $x = n$ et la courbe $y = \frac{1}{x}$. En considérant deux séries de rectangles (qu'on pourrait peut-être appeler

inscrits et circonscrits), on obtient

$$\lim \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \int_m^n \frac{dx}{x}$$

(m et n étant infinis).

Ce procédé revient à faire $p = 0$ dès l'abord dans la démonstration précédente. Seulement on doit considérer

$\int_m^n \frac{dx}{x}$ au lieu de $\int_m^\infty \frac{dx}{x} - \int_n^\infty \frac{dx}{x}$, car $\int_m^\infty \frac{dx}{x}$ est infini.

Or $\int_m^n \frac{dx}{x}$ ne dépend que de $\frac{n}{m}$; car, posant $x = mx'$, j'ai

$$\int_m^n \frac{dx}{x} = \int_1^{\frac{n}{m}} \frac{dx'}{x'}.$$

Si $\frac{n}{m}$ reste fini, la somme considérée a une limite. Or, en posant

$$\begin{aligned} f_{\frac{n}{m}} &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{p} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

on a

$$f_{\frac{n}{m}} = f_{\frac{p}{m}} + f_{\frac{n}{p}}.$$

Posant $\lim \frac{n}{m} = xy$, $\lim \frac{p}{m} = x$, il vient

$$\lim \frac{n}{p} = y$$

et, par suite,

$$f_{xy} = f_x + f_y;$$

de sorte que l'on voit que la limite de la fonction

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n},$$

où n et m augmentent indéfiniment, $\frac{n}{m}$ tendant vers une limite déterminée, est égale à

$$\lim_{\rho} \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{-\rho}}{\rho}, \quad \text{pour } \rho = 0,$$

à $\int_1^{\frac{n}{m}} \frac{dx}{x}$, et jouit de la propriété caractéristique des logarithmes

$$f_{xy} = f_x + f_y.$$