

Condition pour que quatre droites soient les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 158-160

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__158_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONDITION POUR QUE QUATRE DROITES SOIENT LES GÉNÉ-
TRICES D'UN MÊME SYSTÈME D'UN HYPERBOLOÏDE;**

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Soient

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{X - x_1}{a_1} = \frac{Y - y_1}{b_1} = \frac{Z - z_1}{c_1}, \\ \frac{X - x_2}{a_2} = \frac{Y - y_2}{b_2} = \frac{Z - z_2}{c_2}, \\ \frac{X - x_3}{a_3} = \frac{Y - y_3}{b_3} = \frac{Z - z_3}{c_3}, \\ \frac{X - x_4}{a_4} = \frac{Y - y_4}{b_4} = \frac{Z - z_4}{c_4} \end{array} \right.$$

les équations des quatre droites; posons

$$\begin{aligned} c_i y_i - b_i z_i &= l_i, & a_i z_i - c_i x_i &= m_i, & b_i x_i - a_i y_i &= n_i, \\ c y - b z &= l, & a z - c x &= m, & b x - a y &= n, \end{aligned}$$

et soient

$$(2) \quad \frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

les équations d'une nouvelle droite. Pour que les droites (1) fassent partie des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde, il faut qu'une infinité de droites, telles que (2), les rencontrent; il faut donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_i - x & y_i - y & z_i - z \\ a & b & c \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} = 0,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, ce qui peut s'écrire

$$la_i + mb_i + nc_i + al_i + bm_i + cn_i = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & al_1 + bm_1 + cn_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & al_2 + bm_2 + cn_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & al_3 + bm_3 + cn_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & al_4 + bm_4 + cn_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Posant donc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & l_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & l_4 \end{vmatrix} = L, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & m_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = M,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = N,$$

on a

$$aL + bM + cN = 0.$$

Cela doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de a, b, c et, en particulier, pour des valeurs $a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c'''$, telles que l'on n'ait pas

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

sans quoi les directions $a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c'''$ seraient parallèles à un même plan; donc on doit avoir

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 :$$

telles sont les conditions cherchées.