

JUHEL-RÉNOY

**Composition mathématique pour
l'admission à l'École polytechnique en
1885, solution analytique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 498-502

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__498_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE
POLYTECHNIQUE EN 1885;**

SOLUTION ANALYTIQUE

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

*Par les deux foyers d'une ellipse fixe, on fait passer
une circonférence variable :*

1^o .1 quelle condition doit satisfaire cette ellipse

pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection?

2° En chacun des points d'intersection, on mène la tangente à l'ellipse; ces quatre droites forment un quadrilatère; quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?

3° Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Trouver le lieu de leurs points de contact avec le cercle.

1° Soient

$$\alpha^2 Y^2 + b^2 X^2 - \alpha^2 b^2 = 0,$$

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha Y - c^2 = 0$$

les équations de l'ellipse et du cercle, α étant un paramètre variable. L'équation des cordes d'intersection sera

$$(1) \quad c^2 Y^2 + 2b^2 \alpha Y - b^4 = 0.$$

Écrivons que les quatre points d'intersection sont réels, c'est-à-dire que cette équation a ses racines comprises entre b et $-b$, nous aurons les conditions

$$c^2 - b^2 > 2b\alpha > -(c^2 - b^2);$$

la condition relative à l'ellipse est donc $c > b$. Cette condition étant supposée remplie, l'ordonnée du centre du cercle pourra varier entre $\frac{c^2 - b^2}{2b}$ et $-\frac{c^2 - b^2}{2b}$.

2° Soient A, B, C, D les côtés du premier quadrilatère. Les côtés A et B, C et D se coupent sur le petit axe, qui forme ainsi une partie du lieu. Soit β l'ordonnée du point d'intersection des côtés A et B. L'équation de

ces côtés sera

$$(2) \quad (\beta^2 - b^2)(a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2) = a^2(\beta Y - b^2)^2.$$

La corde des contacts avec l'ellipse sera donnée par l'une des racines de l'équation

$$c^2 Y^2 + 2 b^2 \alpha Y - b^4 = 0.$$

L'équation qui donne les pôles de ces droites s'obtient en changeant Y en $\frac{b^2}{Y}$: elle est donc

$$c^2 + 2 \alpha Y - Y^2 = 0.$$

Mais β doit être racine de cette équation, par conséquent

$$(3) \quad \beta^2 - 2 \alpha \beta - c^2 = 0.$$

Or, supposons que, dans l'équation (2), X, Y soient les coordonnées du point d'intersection, soit de A et D , ou A et C , soit de B et D , ou B et C . L'équation (2) donnera les ordonnées des points où ces côtés coupent le petit axe. Elle sera donc identique à l'équation (3). Écrivons donc que le produit des racines de l'équation (2) en β est égal à $-c^2$. Nous aurons le lieu représenté par l'équation

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 = c^2(X^2 - a^2)$$

ou

$$a^2 Y^2 - (c^2 - b^2) X^2 = -a^2 c^2,$$

équation d'une hyperbole rapportée aux mêmes axes de coordonnées que l'ellipse, et dont l'axe transverse est dirigé suivant le grand axe de l'ellipse.

3° Soient A', B', C', D' les symétriques des côtés A, B, C, D par rapport au centre de l'ellipse. Les côtés A et A' sont parallèles, A et B' se coupent sur le grand axe qui constitue une partie du lieu. Supposons que X, Y , dans l'équation (2), soient les coordonnées du point de rencontre de A et C' , par exemple. L'équation (2) en β

devra alors avoir les mêmes racines en valeur absolue que dans le second cas, l'une d'elles aura simplement changé de signe. Écrivons donc que le produit des racines est égal à c^2 , et nous aurons le lieu représenté par

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 = -c^2 (X^2 - a^2)$$

ou

$$X^2 + Y^2 = c^2,$$

équation du cercle décrit du centre de l'ellipse avec la distance focale, c , comme rayon.

4° Soit β l'ordonnée du point d'intersection du petit axe avec une tangente commune à l'ellipse et au cercle. Les équations des tangentes menées au cercle et à l'ellipse, de ce point, sont respectivement

$$\begin{aligned} (\beta^2 - 2\alpha\beta - c^2)(X^2 + Y^2 - 2\alpha Y - c^2) &= (\beta Y - \alpha\beta - \alpha Y - c^2)^2, \\ (\beta^2 - b^2)(a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2) &= a^2 (\beta Y - b^2)^2. \end{aligned}$$

Identifions les rapports des coefficients de X^2 et de Y^2 de ces deux équations; nous aurons

$$\frac{\beta^2 - b^2}{\beta^2 - 2\alpha\beta - c^2} = \frac{a^2}{c^2 + \alpha^2}$$

ou

$$(\alpha^2 - b^2)\beta^2 + 2\alpha^2\alpha\beta + c^4 - b^2\alpha^2 = 0.$$

En supposant la quantité $\alpha^2 - b^2$ différente de zéro, cette équation donne

$$(\alpha^2 - b^2)\beta = -\alpha^2\alpha \pm b(\alpha^2 + c^2).$$

Le point de contact avec le cercle est situé sur la polaire, par rapport au cercle, du point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = \beta$: l'équation de cette polaire est

$$\beta Y - \alpha\beta - \alpha Y - c^2 = 0.$$

Donc

$$\beta = \frac{\alpha Y + c^2}{Y - \alpha}$$

et, par suite,

$$(x^2 - b^2)(xY + c^2) = -(Y - x)a^2x \pm b(x^2 + c^2)(Y - x).$$

Cette équation peut s'écrire

$$[(x^2 - b^2)x + a^2x \mp b(x^2 + c^2)]Y \\ + c^2(x^2 - b^2) - a^2x^2 \pm b x(x^2 + c^2) = 0$$

ou

$$(x^2 + c^2)(x \mp b)(Y \mp b) = 0;$$

d'où

$$Y = \pm b.$$

On voit facilement que, en supposant $x^2 = b^2$, on obtient des points du lieu situés, de même, sur les droites $Y^2 = b^2$. En effet, on a alors

$$\beta(Y \mp b) = \pm bY + c^2,$$

et

$$\pm 2a^2b\beta + c^2 - b^2 = 0$$

ou

$$\pm 2b\beta = b^2 - c^2.$$

En éliminant β entre ces deux équations, on trouve

$$Y = \pm b.$$

Le lieu se compose donc des deux droites $Y^2 = b^2$, c'est-à-dire des tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.