

MORET-BLANC

**Composition mathématique pour
l'admission à l'École centrale (seconde
session, octobre 1883)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 454-460

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__454_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE
CENTRALE (SECONDE SESSION, OCTOBRE 1885)**

(voir 3^e série, t. III, p. 201);

SOLUTION PAR M. MORET-BLANC.

*On donne dans un plan un rectangle ABCD et un point
quelconque P; par ce point on mène une droite de di-*

rection arbitraire PR ; des quatre sommets du rectangle, on abaisse des perpendiculaires AA' , BB' , CC' , DD' sur cette droite.

Cela posé, on demande de démontrer :

1° Que, parmi toutes les droites PR issues du point P , il en existe une, PR' , pour laquelle la somme r^2 des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre, PR'' , pour laquelle cette somme est minima;

2° Que les deux droites, PR' PR'' sont rectangulaires;

3° Que le lieu géométrique des points P pour lesquels le maximum de r^2 conserve une valeur donnée μ^2 est une conique, et que la tangente à cette conique, au point P est la droite PR' ; que, de même, le lieu des points P pour lesquels le minimum de r^2 conserve une valeur donnée λ^2 est une conique, et que la tangente à cette conique, au point P , est la droite PR'' ;

4° Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres μ^2 , λ^2 . Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des dimensions du rectangle s'annulerait.

1° Je prends pour origine des coordonnées rectangulaires le centre, O , du rectangle, et pour axes, des parallèles Ox , Oy , aux côtés AB , BC , dont je représente les longueurs par $2a$, $2b$; $a > b$.

Les coordonnées des sommets A , B , C , D sont respectivement

$$(-a, -b); (a, -b); (a, +b); (-a, +b).$$

Soient α , β les coordonnées du point P , l'équation

d'une droite PR, issue de ce point, est

$$y - c = m(x - z);$$

d'où

$$\overline{AA'}^2 = \frac{[(b - ma) + (c - mx)]^2}{m^2 - 1},$$

$$\overline{BB'}^2 = \frac{[(b + ma) + (c - mx)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{CC'}^2 = \frac{[(b - ma) - (c - mx)]^2}{m^2 - 1},$$

$$\overline{DD'}^2 = \frac{[(b + ma) - (c - mx)]^2}{m^2 + 1},$$

en remarquant que l'on peut changer le signe de la quantité élevée au carré.

Il s'ensuit

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 - \overline{CC'}^2 - \overline{DD'}^2 \\ = \frac{4(a^2 - x^2)m^2 - 8xcm - 4(b^2 + c^2)}{m^2 - 1} = r^2$$

ou, en chassant le dénominateur,

$$4\left(a^2 - x^2 - \frac{r^2}{4}\right)m^2 - 8xcm - 4\left(b^2 + c^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 0$$

ou

$$\left(a^2 - x^2 - \frac{r^2}{4}\right)m^2 - 2xcm - \left(b^2 + c^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 0,$$

équation qui donne

$$m = \frac{4xc \pm \sqrt{-r^2 + 4(a^2 - b^2 + x^2 - c^2)r^2 - 16(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2c^2)}}{4\left(a^2 + x^2 - \frac{r^2}{4}\right)}.$$

Décomposons en facteurs la quantité sous le radical, et à cet effet cherchons les racines r^2 de l'équation

$$r^4 - 4(a^2 + b^2 + x^2 + c^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2c^2) = 0$$

Le coefficient de r^4 étant négatif, la plus grande racine sera un maximum, et la plus petite, un minimum.

On a

$$\begin{aligned} r^2 &= 2(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2) \\ &\quad - 2\sqrt{(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2)^2 - 4(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2\ell^2)} \\ &= 2(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2) \pm 2\sqrt{(a^2 - b^2 - x^2 - \ell^2)^2 + 4x^2\ell^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$r(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2) + 2\sqrt{(a^2 - b^2 - x^2 - \ell^2)^2 + 4x^2\ell^2}$$

est un maximum μ^2 , et

$$2(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2) - 2\sqrt{(a^2 - b^2 - x^2 - \ell^2)^2 + 4x^2\ell^2}$$

un minimum λ^2 ⁽¹⁾.

Si le point P coïncidait avec le point O, le maximum serait $4a^2$ et le minimum $4b^2$; en général, le point P s'éloignant, le maximum sera plus grand que $4a^2$ et le minimum sera compris entre $4b^2$ et $4a^2$.

(1) Pour que les valeurs de m soient réelles, il faut que la quantité

$$r^4 + 4(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2\ell^2)$$

soumise au radical soit positive ou nulle, ce qui revient à

$$r^2 - 4(a^2 - b^2 + x^2 + \ell^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2\ell^2) \geq 0.$$

En désignant par μ^2 et λ^2 les valeurs de r^2 qui annulent ce dernier polynôme, on a

$$\begin{aligned} r^2 &= 4(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2\ell^2) \\ &= (r^2 - \mu^2)(r^2 - \lambda^2), \end{aligned}$$

où μ^2 et λ^2 sont des quantités réelles, positives et inégales.

Soit $\mu^2 > \lambda^2$; alors la relation

$$r^2 - 4(a^2 + b^2 + x^2 + \ell^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2x^2 + a^2\ell^2) \leq 0$$

entraîne évidemment les suivantes :

$$(r^2 - \mu^2) \leq 0, \quad r^2 - \lambda^2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad r^2 \leq \mu^2, \quad \text{et} \quad r^2 \geq \lambda^2,$$

c'est-à-dire que μ^2 est un maximum, et λ^2 un minimum.

(G.)

2° Pour le maximum, le coefficient angulaire de PR' est

$$\begin{aligned} m' &= \frac{4\alpha\beta}{4\alpha^2 + 4\alpha^2 - \mu^2} \\ &= \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{(\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}} \\ &= \frac{\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Pour le minimum, le coefficient angulaire de PR'' est

$$\begin{aligned} m'' &= \frac{4\alpha\beta}{4\alpha^2 + 4b^2 - \lambda^2} \\ &= \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}} \\ &= \frac{\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{(\alpha^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta}; \end{aligned}$$

d'où $m'm'' = -1$, ce qui prouve que les deux droites PR', PR'' sont rectangulaires.

3° En regardant λ^2 et μ^2 comme des constantes α et β comme des variables, et faisant disparaître les radicaux des valeurs de μ^2 et λ^2 , on a

$$4(\mu^2 - 4b^2)\alpha^2 + 4(\mu^2 - 4\alpha^2)\beta^2 = (\mu^2 - 4\alpha^2)(\mu^2 - 4b^2)$$

et

$$4(\lambda^2 - 4b^2)\alpha^2 + 4(\lambda^2 - 4\alpha^2)\beta^2 = (\lambda^2 - 4\alpha^2)(\lambda^2 - 4b^2).$$

Ces deux équations représentent deux coniques dont les axes sont dirigés suivant les axes des coordonnées. D'après la remarque faite plus haut (1), la première est une ellipse, et la seconde une hyperbole, le grand axe de l'ellipse et l'axe transverse de l'hyperbole sont dirigés suivant Oy.

(1) Cette remarque est que le maximum μ^2 est plus grand que $4\alpha^2$, et le minimum λ^2 compris entre $4b^2$ et $4\alpha^2$.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse au point P est

$$-\frac{(\mu^2 - 4b^2)x}{(\mu^2 - 4a^2)\bar{c}}.$$

Désignons, pour abréger l'écriture, par R le radical

$$\sqrt{(a^2 - b^2 + x^2 - \bar{c}^2)^2 + 4x^2\bar{c}^2};$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2 - 4b^2}{\mu^2 - 4a^2} &= \frac{x^2 + \bar{c}^2 + a^2 - b^2 + R}{x^2 + \bar{c}^2 - (a^2 - b^2) + R} \\ &= \frac{(x^2 + \bar{c}^2 + a^2 - b^2 + R)[x^2 + \bar{c}^2 - (a^2 - b^2) - R]}{[x^2 + \bar{c}^2 - (a^2 - b^2)]^2 - R^2} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + x^2 - \bar{c}^2 + R}{2x^2}; \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{(\mu^2 - 4b^2)x}{(\mu^2 - 4a^2)\bar{c}} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + x^2 - \bar{c}^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 + x^2 - \bar{c}^2)^2 + 4x^2\bar{c}^2}}{-2x\bar{c}} = m'. \end{aligned}$$

Pour l'hyperbole, il suffit de changer μ^2 en λ^2 , et R en $-R$; ce qui donne

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda^2 - 4b^2)x}{(\lambda^2 - 4a^2)\bar{c}} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + x^2 - \bar{c}^2 - \sqrt{(a^2 - b^2 + x^2 - \bar{c}^2)^2 + 4x^2\bar{c}^2}}{-2x\bar{c}} = m''. \end{aligned}$$

Les tangentes aux deux coniques, au point P, sont donc les droites PR', PR''.

4° L'ellipse et l'hyperbole étant concentriques et se coupant orthogonalement, on pourrait déjà conclure qu'elles sont homofocales; c'est ce que démontre aussi la détermination directe de leurs foyers.

Les carrés des demi-axes de l'ellipse sont $\frac{\mu^2 - 4b^2}{4}$,

$\frac{a^2 - 4a^2}{4}$; leur différence ($a^2 - b^2$) est le carré de la distance de chacun des foyers au centre, ces foyers sont situés sur l'axe Oy , leurs ordonnées sont

$$y = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On trouve les mêmes valeurs pour les ordonnées des foyers de l'hyperbole.

Lorsque $b = 0$, les ordonnées des foyers sont $\pm a$.

Lorsque $a = 0$, les foyers sont sur Ox , et leurs abscisses sont $\pm b$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Barisien ; et Gailardon, Jacques, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Rouen.