

F. GOMES TEIXEIRA

Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 351-359

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__351_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTERPOLATION AU MOYEN DES FONCTIONS CIRCULAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

Professeur à l'Université de Coimbra.

I.

Le problème de la détermination de la fonction $f(x)$ qui reçoit les valeurs $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, quand on donne à la variable x les valeurs $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, est indéterminé. On y peut satisfaire au moyen d'une fonction entière, homogène de $\sin x$ et $\cos x$, et nous avons alors la formule (*Cours d'Analyse* de M. Hermite)

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = & \frac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\dots\sin(x-a_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\dots\sin(a_1-a_n)} y_1 \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\dots\sin(x-a_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\dots\sin(a_2-a_n)} y_2 \\ & + \dots\dots\dots \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\dots\sin(a_n-a_{n-1})} y_n. \end{aligned}$$

Inversement, $f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène du degré $n-1$, nous avons une formule de décomposition d'une fraction en des fractions simples, à savoir

$$\begin{aligned} & \frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_n)} \\ = & \frac{f(\sin a_1, \cos a_1)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\dots\sin(a_1-a_n)} \frac{1}{\sin(x-a_1)} \\ & + \frac{f(\sin a_2, \cos a_2)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\dots\sin(a_2-a_n)} \frac{1}{\sin(x-a_2)} \\ & + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nous allons considérer, dans cette Note, le cas où quelques-unes des quantités $a_1, a_2, \dots$ sont égales, pour

chercher la formule de décomposition et la formule correspondante d'interpolation.

II.

En supposant premièrement $a_1 = a_2$ et en déterminant la somme des deux premiers termes de la formule précédente par le chemin qu'on a l'habitude de suivre dans les questions de cette nature, c'est-à-dire en posant $a_2 = a_1 + \omega$, on a le résultat

$$\begin{aligned} y = & - \frac{\sin(x - a_1 - \omega) \sin(x - a_3) \dots \sin(x - a_n)}{\sin \omega} F(a_1) \\ & + \frac{\sin(x - a_1) \sin(x - a_3) \dots \sin(x - a_n)}{\sin \omega} [F(a_1) + \omega F'(a_1) + \dots] \\ & + \frac{\sin(x - a_1) \sin(x - a_1 - \omega) \dots \sin(x - a_n)}{\sin(a_3 - a_1) \sin(a_3 - a_1 - \omega) \dots \sin(a_3 - a_n)} y_3 + \dots, \end{aligned}$$

où

$$F(a_1) = \frac{f(a_1)}{\sin(a_1 - a_3) \sin(a_1 - a_4) \dots}$$

et, par conséquent,

$$F(a_2) = \frac{f(a_2)}{\sin(a_2 - a_3) \sin(a_2 - a_4) \dots},$$

et où l'on représente $f(\sin x, \cos x)$ par $f(x)$.

Cette formule donne, en la développant suivant les puissances de ω et en y posant ensuite $\omega = 0$,

$$\begin{aligned} y = & \cos(x - a_1) \sin(x - a_3) \dots \sin(x - a_n) F(a_1) \\ & + \sin(x - a_1) \sin(x - a_3) \dots \sin(x - a_n) F'(a_1) \\ & + \frac{\sin^2(x - a_1) \sin(x - a_4) \dots \sin(x - a_n)}{\sin^2(a_3 - a_1) \sin(a_3 - a_4) \dots \sin(a_3 - a_n)} f(a_3) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Cette formule détermine la fonction $f(x)$, étant données les quantités $f(a_1), f'(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots$

Cela posé, nous allons considérer le cas général. Soit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=i} \frac{\left[\frac{\sin(x-a_1) \sin(x-a_2) \dots \sin(x-a_i)}{\times \sin(x-a_{i+1}) \dots \sin(x-a_n)} \right]}{\left[\frac{\sin(a_k-a_1) \sin(a_k-a_2) \dots \sin(a_k-a_i)}{\times \sin(a_k-a_{i+1}) \dots \sin(a_k-a_n)} \right]} F(a_k) \\ + \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\left[\frac{\sin(x-a_1) \sin(x-a_2) \dots \sin(x-a_i) \dots}{\times \sin(x-a_n)} \right]}{\left[\frac{\sin(a_k-a_1) \sin(a_k-a_2) \dots \sin(a_k-a_i) \dots}{\times \sin(a_k-a_n)} \right]} f(a_k),$$

en posant

$$F(a_k) = \frac{f(a_k)}{\sin(a_k-a_{i+1}) \sin(a_k-a_{i+2}) \dots}.$$

Si l'on fait maintenant

$$a_2 = a_1 + \omega, \quad a_3 = a_1 + 2\omega, \quad \dots, \\ a_k = a_1 + (k-1)\omega, \quad \dots, \quad a_i = a_1 + (i-1)\omega,$$

la première ligne de $f(x)$, que nous appellerons P, prend la forme

$$P = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{\left[\frac{\sin(x-a_1) \sin(x-a_1-\omega) \dots}{\times \sin(x-a_1-(i-1)\omega) \dots} \right]}{\left[\frac{\sin(k-1)\omega \sin(k-2)\omega \dots}{\times \sin \omega \sin \omega \dots} \right]} F[a_1 + (k-1)\omega].$$

Donc la limite de P correspondant à $\omega = 0$, que nous appellerons A, sera le coefficient de ω^{i-1} dans le développement de $P \times \omega^{i-1}$ en série, c'est-à-dire

$$A = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \left\{ \frac{\left[\frac{\sin(x-a_1) \sin(x-a_1-\omega) \dots}{\times \sin(x-a_1-(i-1)\omega) \omega^{i-1}} \right]}{\times F[a_1 + (k-1)\omega]} \right\} d^{i-1} \frac{\left[\frac{\sin(k-1)\omega \sin(k-2)\omega \dots}{\times \sin \omega \sin \omega \sin 2\omega \dots} \right]}{d\omega^{i-1}} \Bigg|_{\omega=0} \\ \times \sin(x-a_{i+1}) \dots \sin(x-a_n).$$

On doit remarquer que, dans cette expression, on ne doit pas écrire $\sin(x - a_1)$ quand $k = 1$; on ne doit pas écrire $\sin(x - a_1 - \omega)$ quand $k = 2$, etc.

Pour obtenir A, nous employons la formule de Leibnitz, et nous avons

$$\begin{aligned} A = & \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{\sin(x - a_1)}{(k-1)! (i-k)!} \\ & \times \left\{ \sin(x - a_1 - \omega) + \sin(x - a_1 - 2\omega) + \dots \right. \\ & + \sin[x - a_1 - (i-1)\omega] + \frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega} \\ & + \frac{(k-2)\omega}{\sin(k-2)\omega} + \dots + \frac{\omega}{\sin \omega} + \frac{\omega}{\sin \omega} + \dots \\ & \left. + \frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega} + F[a_1 + (k-1)\omega] \right\}^{(i-1)} \\ & \times \sin(x - a_{i+1}) \dots \sin(x - a_n) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A = & \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{(i-1)!}{(i-k)!} \sin(x - a_1) \sin(x - a_{i+1}) \dots \sin(x - a_n) \\ & \times \left\{ \sum (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} \frac{1^\alpha \cdot 2^\beta \dots (i-1)^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \right. \\ & \times \sin\left(x - a_1 + \alpha \frac{\pi}{2}\right) \dots \sin\left(x - a_1 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) \\ & \times \frac{(k-1)^{u-1} F^{(n)}(a_1)}{u! p! q! \dots m!} \left[\frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega} \right]_{\omega=0}^{(p)} \dots \left[\frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega} \right]_{\omega=0}^{(m)} \left. \right\}, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda, u, p, q, \dots, m$ représentent toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda + u + p + q + \dots + m = i - 1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\left[\frac{d^p(x \operatorname{coséc} x)}{dx^p} \right]_{x=0} = 2(2^{p-1} - 1) B_{p-1}$$

quand p est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^p(x \operatorname{coséc} x)}{dx^p} \right]_{x=0} = 0$$

quand p est un nombre impair, en représentant par B_p , les nombres de Bernoulli. Donc

$$A = \sum X \sin(x - a_1) \sin\left(x - a_1 + \alpha \frac{\pi}{2}\right) \dots \\ \times \sin\left(x - a_1 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) \sin(x - a_{i+1}) \dots \sin(x - a_n),$$

où

$$X = (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda+i-k} \\ \times \frac{2^{i-1}(i-1)!(k-1)^{u-1} 1^\alpha 2^\beta \dots (i-1)^\lambda B_{p-1} B_{q-1} \dots B_{m-1}}{(i-k)! \alpha! \beta! \dots \lambda! u! p! q! \dots m!} \\ \times (k-1)^p (k-2)^q \dots 1 \dots (i-k)^m \\ \times (r^{p-1}-1)(r^{q-1}-1) \dots (r^{m-1}-1) F^{(u)}(a_1),$$

en donnant à $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, u, p, q, \dots, m, k$ toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda + u + p + q + \dots + m = k - 1,$$

où k ne peut pas être supérieur à i , et où $p, q, \dots, m$ doivent être des nombres pairs.

En appelant B la limite correspondant à $\omega = 0$ de la deuxième partie de l'expression de $f(x)$, on peut écrire

$$B = \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\sin^i(x - a_1) \sin(x - a_{i+1}) \dots \sin(x - a_n)}{\sin^i(a_k - a_1) \sin(a_k - a_{i+1}) \dots \sin(a_k - a_n)} f(a_k).$$

En substituant les expressions de A et B que nous venons d'obtenir dans la formule

$$f(x) = A + B,$$

on a la fonction $f(x)$ qui prend les valeurs données

$$f(a_1), f'(a_1), f''(a_1), \dots, f^{(i)}(a_1), \\ f(a_{i+1}), f(a_{i+2}), \dots, f(a_n).$$

Avec un simple changement de notation, en supposant que les fonctions données sont

$$f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(i)}(a), \\ f(b_1), f(b_2), f(b_3), \dots, f(b_n),$$

on a

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum X \sin(x-a) \sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \dots \\ &\quad \times \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right) \sin(x-b_1) \dots \sin(x-b_n), \\ B &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin^i(x-a) \sin(x-b_1) \dots \sin(x-b_n)}{\sin(b_k-a) \sin(b_k-b_1) \dots \sin(b_k-b_n)} f(a_k). \end{aligned}$$

En posant

$$b_2 = b_1 + \omega, \quad b_3 = b_1 + 2\omega, \quad \dots, \quad b_j = b_1 + (j-1)\omega$$

dans les formules précédentes, on trouve la formule qui correspond au cas où sont données les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} f(a), \quad f'(a), \quad f''(a), \quad \dots, \quad f^{(i)}(a), \\ f(b_1), \quad f'(b_1), \quad f''(b_1), \quad \dots, \quad f^{(j)}(b_1), \\ f(b_{j+1}), f(b_{j+2}), f(b_{j+3}), \dots, f(b_n). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas général. Si l'on donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(i)}(a), \\ f(b), f'(b), f''(b), \dots, f^{(j)}(b), \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ f(e), f'(e), f''(e), \dots, f^{(m)}(e), \end{aligned}$$

et si l'on cherche la fonction $f(x)$, on peut employer la formule suivante

$$f(x) = \Lambda + B + C + \dots,$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum X \sin(x-a) \sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \dots \\ &\quad \times \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right) \sin^j(x-b) \sin^i(x-c) \dots \sin^m(x-e), \\ B &= \sum X_1 \sin^i(x-a) \sin(x-b) \sin\left(x-b+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \dots \\ &\quad \times \sin\left(x-b+\lambda\frac{\pi}{2}\right) \sin^i(x-c) \dots \sin^m(x-e), \\ C &= \sum X_2 \sin^i(x-a) \sin^j(x-b) \sin(x-c) \sin\left(x-c+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \dots \\ &\quad \times \sin\left(x-c+\lambda\frac{\pi}{2}\right) \dots \sin^m(x-e). \end{aligned}$$

.....

et où les quantités $X_1, X_2, \dots$ dérivent de X par le changement de i en j et de $F(a)$ en $F_1(b)$ pour X_1 , et de i en l et de $F(a)$ en $F_2(c)$ pour X_2 , etc., étant

$$F(a) = \frac{f(a)}{\sin^j(a-b) \sin^l(a-c) \dots \sin^m(a-e)},$$

$$F_1(b) = \frac{f(b)}{\sin^l(b-a) \sin^l(b-c) \dots \sin^m(b-e)},$$

.....

Ainsi les quantités $\alpha, \beta, \dots, \lambda, u, p, \dots, m, k$ représentent les solutions de l'équation

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda + u + p + q + \dots + m = k - 1,$$

k étant inférieur à $i + 1$ en X , à $j + 1$ en X_1 , à $l + 1$ en X_2 , etc.

Nous devons remarquer qu'en A on ne doit pas écrire $\sin(x - a)$ dans le terme correspondant à $k = 1$, on ne doit pas écrire $\sin\left(x - a + \alpha \frac{\pi}{2}\right)$ dans le terme correspondant à $k = 2$, etc. La même chose arrive en B, C, ... relativement à $b, c, \dots$

Nous devons encore remarquer que le nombre des quantités $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ est $i - 1$ en A, mais que, quand $k = 2$, manque β ; quand $k = 3$, manque γ , etc. On doit faire la même observation à l'égard de B, C, Le nombre des quantités $p, q, \dots, m$ est $i - 1$.

Enfin, quand quelque'une des quantités $\alpha, \beta, \dots, p, q, \dots, k - 1, i - k, u$ est nulle, le facteur correspondant ne doit pas exister dans la formule.

Les formules que nous venons de trouver résolvent la question d'interpolation proposée, c'est-à-dire qu'elles déterminent une fonction circulaire, qui prend, elle et ses dérivées, des valeurs données. Nous allons donc considérer maintenant la décomposition de la fraction correspondante.

III.

Soit $f(\sin x, \cos x)$ une fonction entière, homogène du degré $i + j + l + \dots + m - 1$. La formule de décomposition qui résulte de la formule précédente est

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a) \sin^j(x-b) \dots \sin^m(x-e)} \\ = \frac{A_1}{\sin(x-a)} + \frac{A_2 \cot(x-a)}{\sin(x-a)} + \dots + \frac{A_i \cot^{i-1}(x-a)}{\sin(x-a)} \\ + \frac{B_1}{\sin(x-b)} + \frac{B_2 \cot(x-b)}{\sin(x-b)} + \dots + \frac{B_j \cot^{j-1}(x-b)}{\sin(x-b)} \\ + \dots \dots \dots$$

et nous connaissons les coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, \dots$.

Nous allons indiquer rapidement deux autres méthodes pour trouver les coefficients précédents, analogues à celles employées dans la décomposition des fractions rationnelles.

En posant

$$\varphi(x) = \sin^j(x-b) \sin^l(x-c) \dots \sin^m(x-e),$$

nous avons

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)} = A_1 \sin^{i-1}(x-a) \\ + A_2 \cos(x-a) \sin^{i-2}(x-a) + \dots \\ + A_i \cos^{i-1}(x-a) + K \cos^i(x-a).$$

Cette formule donne

$$A_i = \frac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}.$$

En la différentiant, on trouve le résultat

$$\frac{d}{dx} \frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)} = (i-1) A_1 \sin^{i-2}(x-a) \cos(x-a) + \dots \\ + A_{i-1} \cos^{i-1}(x-a) \\ + (i-1) A_i \cos^{i-2}(x-a) \sin(x-a) + \dots,$$

qui donne

$$A_{i-1} = \frac{d \frac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}}{da}.$$

De la même manière on trouve les autres coefficients en continuant les différentiations.

On peut aussi calculer les coefficients $A_1, A_2, \dots$ au moyen des équations qu'on obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de h dans l'identité suivante :

$$\begin{aligned} f(\sin a, \cos a) + \frac{df}{da} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{da^2} h^2 + \dots \\ = (A_1 \sin^{i-1} h + A_2 \cos h \sin^{i-2} h + \dots + A_i \cos^{i-1} h) \\ \times [\varphi(a) + h \varphi'(a) + \frac{1}{2} h^2 \varphi''(a) + \dots], \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} f(\sin a, \cos a) &= A_i \varphi(a), \\ f'(\sin a, \cos a) &= A_{i-1} \varphi(a) + A_i \varphi'(a), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les formules précédentes appliquées au Calcul intégral donnent une formule de réduction d'intégrales.

En effet, au moyen de ces formules, on réduit l'intégration des fractions

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a) \sin^j(x-b) \dots},$$

$f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène du degré $i + j + \dots + m - 1$, à l'intégration des fonctions de la forme

$$\frac{\cos^t(x-a)}{\sin^{t+1}(x-a)},$$

qui sont le sujet des formules de réduction qu'on trouve dans tous les Traités de Calcul intégral.

On peut encore employer, pour l'intégration de cette fraction, la formule

$$\int \frac{\cos^t(x-a)}{\sin^{t+1}(x-a)} dx = - \int \frac{\cot^t(x-a)}{\sqrt{1+\cot^2(x-a)}} d \cot(x-a).$$