

CH. BIEHLER

**Sur la construction des courbes dont
l'équation est donnée en coordonnées
polaires (fin)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 249-256

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4_249_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION
EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES**

[FIN (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

III.

BRANCHES PARABOLIQUES DANS LES COURBES DONT L'ÉQUATION
EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES.

1. Soit toujours

$$\rho^m \varphi_m(\omega) + \rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\omega) + \dots + \rho \varphi_1(\omega) + \varphi(\omega) = 0$$

l'équation de la courbe. Nous avons vu que, quand α est une racine simple de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, la racine ρ_1 , qui augmente indéfiniment quand ω tend vers α , donne naissance à une branche de courbe hyperbolique.

Nous allons supposer actuellement que α est racine double de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, c'est-à-dire

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0;$$

nous supposons en outre que α n'annule pas $\varphi_{m-1}(\omega)$.

Dans ce cas, la racine ρ_1 , qui augmente indéfiniment, nous donne l'équation

$$\rho_1 + S_1 = - \frac{\varphi_{m-1}(\alpha + \varepsilon)}{\frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} \varphi'''_m(\alpha) + \dots};$$

S_1 étant une quantité finie, d'après nos hypothèses, ρ_1 aura le signe de

$$- \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)};$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. IV, p. 223.
Ann. de Mathémat., 3^e série, t. IV. (Juin 1885.)

de plus, en désignant par λ_1 la fonction $\rho_1 \sin \varepsilon$, il vient

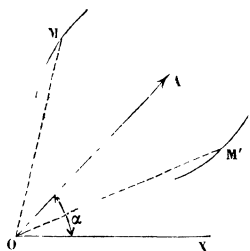
$$\lambda_1 = - \left[S_1 \varepsilon^2 + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \dots}{\frac{1}{1.2} \varphi_m''(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2.3} \varphi_m'''(\alpha) + \dots} \right] \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

On voit par cette formule que λ_1 augmente indéfiniment quand ε tend vers zéro et que le signe de λ_1 est celui de

$$- \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi_m''(\alpha)} \varepsilon.$$

Le signe de λ_1 change donc avec ε . En se reportant à la signification géométrique de λ_1 , on voit que la racine ρ_1 engendre une branche de courbe qui s'éloigne indéfiniment du rayon polaire OA mené sous l'angle α quand ε tend vers zéro. Le signe $-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi_m''(\alpha)}$ donne d'ailleurs la disposition des branches de courbe par rapport au rayon OA. Si $-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi_m''(\alpha)}$ est positif, la courbe présente la disposition de la *fig. 1*; car à une valeur po-

Fig. 1.



sitive de ε correspond une valeur positive de λ et à une valeur négative de ε une valeur négative de λ .

2. Supposons maintenant

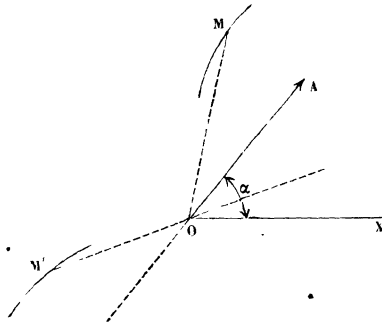
$$\begin{aligned} \varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_m'(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m^{(p-1)}(\alpha) = 0, \\ \varphi_m^{(p)}(\alpha) > 0, \quad \varphi_{m-1}(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

On verra, comme dans le cas précédent, que la racine, qui augmente indéfiniment quand ε tend vers zéro, engendre une branche parabolique dont la forme générale est celle de la *fig. 1* quand p est un nombre pair. Mais, si p est impair, λ_1 ayant une expression dont le signe est donné par

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi_m^{(p)}(\alpha)} \varepsilon^{p-1},$$

on voit que λ_1 ne change pas de signe avec ε ; on ob-

Fig. 2.



tient alors une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig. 2*.

3. Considérons actuellement le cas où

$$\begin{aligned} \varphi_m(\alpha) &= 0, & \varphi'_m(\alpha) &= 0, & \varphi''_m(\alpha) &= 0, & \varphi_{m-1}(\alpha) &= 0, \\ \varphi'''_m(\alpha) &\geq 0, & \varphi'_{m-1}(\alpha) &\geq 0. \end{aligned}$$

Deux racines ρ_1 et ρ_2 de l'équation de la courbe tendront vers l'infini et l'on aura des expressions de la forme

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^3},$$

pour les fonctions $\rho_1 + \rho_2$ et $\rho_1 \rho_2$.

En désignant, comme nous l'avons fait dans la théorie des asymptotes, par λ_1 et λ_2 les quantités $\rho_1 \sin \varepsilon$, $\rho_2 \sin \varepsilon$, il viendra

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \frac{A + A' \varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{B + B' \varepsilon}{\varepsilon}.$$

On voit que la somme et le produit des quantités λ_1, λ_2 augmentent indéfiniment; mais, si l'on divise membre à membre ces égalités, on obtiendra

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \frac{A + A' \varepsilon}{B + B' \varepsilon};$$

par suite, quand ε tendra vers zéro, la somme $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ tend vers la quantité finie $\frac{A}{B}$; il en résulte que l'une des quantités λ augmente indéfiniment et que l'autre tend vers une limite finie $\frac{B}{A}$.

L'une des racines, ρ_1 par exemple, augmente donc indéfiniment en engendrant une branche parabolique, et l'autre ρ_2 engendrera une branche hyperbolique dont l'asymptote correspondante a pour équation

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{B}{A}.$$

La branche parabolique se construit aisément, car on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A + A' \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon},$$

et, comme λ_2 a pour limite $l_2 = + \frac{B}{A}$, λ_2 aura le signe de $\frac{A}{\varepsilon}$; la disposition de la courbe est donc analogue à celle de la *fig. 1*.

Quant à la branche hyperbolique, il suffit, pour la

construire, de connaître le signe de la différence

$$\lambda_2 - \frac{B}{A} = \lambda''.$$

Or on tire évidemment des formules précédentes

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon},$$

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\varepsilon^3}{\sin^2 \varepsilon} \frac{1}{B + B'\varepsilon},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 \varepsilon} \left(\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon} \right)^2 - \frac{4\varepsilon^3}{\sin^2 \varepsilon} \frac{1}{B + B'\varepsilon},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \frac{1}{A + A'\varepsilon} + \dots$$

Si A' et B' sont les parties indépendantes de ε dans A' et B' , la différence $\frac{1}{\lambda_2} - \frac{A}{B}$ a pour premier terme

$$\left[\frac{BA'_1 - AB'_1}{B^2} - \frac{1}{A} \right] \varepsilon;$$

le signe du coefficient de ε donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

4. Passons au cas où l'on aurait

avec $\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_m(\alpha) = 0,$

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(\alpha) = 0,$$

$$\varphi'''_m(\alpha) \geq 0, \quad \varphi''_{m-1}(\alpha) \geq 0, \quad \varphi_{m-2}(\alpha) < 0$$

Deux racines tendent encore vers l'infini, et pour ce cas on a les deux formules

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

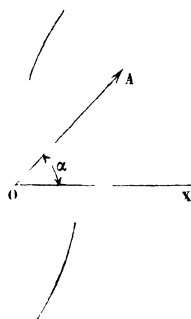
par suite

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} (\Lambda + \Lambda' \varepsilon),$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} \left(\frac{B + B' \varepsilon}{\varepsilon} \right).$$

$\lambda_1 + \lambda_2$ reste fini, mais le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ augmente indéfiniment, et il est du signe de $\frac{B}{\varepsilon}$; on en conclut que λ_1 et λ_2 augmentent indéfiniment et sont de signe contraire.

Fig. 3.



Pour avoir la position de la courbe, il suffit de former l'expression de $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Or on a

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \left[\frac{(\Lambda + \Lambda' \varepsilon)^2 \varepsilon - 4(B + B' \varepsilon)}{\varepsilon} \right] \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2};$$

par conséquent $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ n'est positif que quand $-\frac{4B}{\varepsilon}$ est positif, c'est-à-dire quand ε est de signe contraire à B.

La fig. 3 a été construite dans l'hypothèse de B négatif.

3. Supposons maintenant

avec $\varphi_m(x) = 0, \quad \varphi'_m(x) = 0, \quad \varphi''_m(x) = 0, \quad \varphi'''_m(x) = 0$

$$\varphi_{m-1}(x) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(x) = 0$$

et

$$\varphi_m^{iv}(\alpha) < 0, \quad \varphi_{m-1}''(\alpha) > 0, \quad \varphi_{m-2}(\alpha) > 0.$$

Les racines qui tendent vers zéro nous donnent les relations

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^4};$$

la somme $\rho_1 + \rho_2$ est infinie ainsi que $\rho_1 \times \rho_2$, quand ε s'annule; on a de plus

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^4}.$$

Les racines ne sont donc réelles que si $A^2 - 4B > 0$.

Supposons cette condition remplie, on voit que les quantités λ_1 et λ_2 augmentent toutes deux indéfiniment.

On a, en outre,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^2}; \quad \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

λ_1 et λ_2 sont donc réels, quel que soit le signe de ε ; le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ est du signe de B , quel que soit le signe de ε ; le signe des quantités λ_1 et λ_2 dépend de celui de $A \sin \varepsilon$.

Fig. 4.

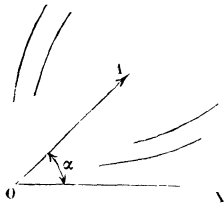
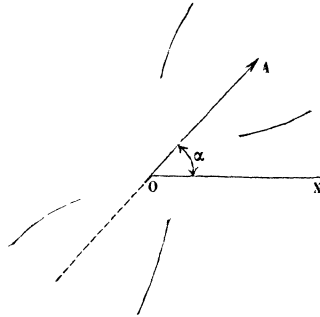


Fig. 5.



Si $B > 0$, on a une disposition analogue à celle de la fig. 4.

Si $B < 0$, on obtient la *fig.* 5; la *fig.* 4 a été construite dans l'hypothèse de $A > 0$.

6. Si $A^2 - 4B < 0$ le point à l'infini est imaginaire.

Si $A^2 - 4B = 0$, et si l'on pose

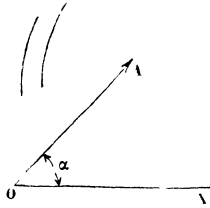
$$C = C_1 + C'_1 \varepsilon,$$

$(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ prend la forme

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{C_1 + C'_1 \varepsilon}{\varepsilon};$$

λ_1 et λ_2 ne sont donc réels qu'autant que C_1 et ε sont

Fig. 6.



de même signe; mais B est, dans ce cas, essentiellement positif, puisque $A^2 = 4B$; par suite, les deux racines ρ_1, ρ_2 sont de même signe, ainsi que λ_1 et λ_2 .

On obtient alors une disposition analogue à celle de la *fig.* 6 qui correspond au rebroussement de seconde espèce.