

X. ANATOMARI

Généralisation d'un théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 194-196

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__194_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. X. ANATOMARI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Étant donnés deux polynômes entiers en x et premiers entre eux, U_m et V_n , de degrés respectifs m et n , on démontre dans la théorie du plus grand commun diviseur

algébrique qu'il existe deux polynômes entiers en x , X et Y , tels que l'on ait identiquement

$$(1) \quad U_m X + V_n Y = 1.$$

Nous allons démontrer qu'il existe deux polynômes entiers en x , X et Y , tels que l'on ait plus généralement l'identité

$$(2) \quad U_m X + V_n Y = f(x),$$

dans laquelle $f(x)$ est un polynôme entier en x de degré $m + n - 1$ au plus, mais non identiquement nul.

Soient, en effet,

$$\begin{aligned} U_m &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m, \\ V_n &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n, \\ f(x) &= c_0 x^{m+n-1} + c_1 x^{m+n-2} + \dots + c_{m+n-1}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, l'un, au moins, des coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{m+n-1}$ est différent de zéro.

Posons

$$\begin{aligned} X &= \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}, \\ Y &= \beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \dots + \beta_{m-1}, \end{aligned}$$

puis identifions l'expression $U_m X + V_n Y$ avec $f(x)$. Nous obtenons ainsi, pour déterminer $m + n$ indéterminées, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$, les $m + n$ équations linéaires et non homogènes

$$\left| \begin{array}{rcl} \alpha_0 \alpha_0 & - b_0 \beta_0 & = c_0, \\ \alpha_1 \alpha_0 - \alpha_0 \alpha_1 & + b_1 \beta_0 + b_0 \beta_1 & = c_1, \\ \alpha_2 \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 & + b_2 \beta_0 + b_1 \beta_1 + b_0 \beta_2 & = c_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ & \alpha_m \alpha_{n-1} & - b_n \beta_{m-1} = c_{m+n-1}. \end{array} \right|$$

Remarquons que, dans ces équations, le déterminant des inconnues est le résultant des deux équations $U_m = 0$, $V_n = 0$, qui n'ont aucune racine commune par hypo-

thèse. Il en résulte que ces équations sont vérifiées par un système unique de valeurs des inconnues. Ces inconnues ne sont d'ailleurs pas toutes nulles, puisque l'une, au moins, des quantités $c_0, c_1, c_2, \dots$ n'est pas nulle. Il résulte de là que, pour un polynôme donné $f(x)$, il existe un couple unique de polynômes X et Y , vérifiant l'identité (2).

Observation. — Le résultat qui précède peut servir :
1° A établir simplement l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)\varphi(x)} = \frac{f_1(x)}{f(x)} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

que l'on rencontre dans la décomposition des fractions rationnelles;

2° A calculer les coefficients dans la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, notamment dans le cas des racines imaginaires.

Nous nous contentons de signaler ces deux applications
