

WEILL

Sur quelques équations indéterminées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 189-193

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__189_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

PAR M. WEILL.

I. Soit l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^{2p+1},$$

dans laquelle a , b et p sont des entiers donnés quelconques. Posons

$$z = au^2 + bt^2,$$

nous pourrions poser

$$x\sqrt{a} + yi\sqrt{b} = (u\sqrt{a} + ti\sqrt{b})^{2p+1}$$

et prendre

$$\begin{aligned} x &= u^{2p+1}a^p - C_{2p+1}^2 b t^2 u^{2p-1} a^{p-1} \\ &\quad + C_{2p+1}^4 b^2 t^4 u^{2p-3} a^{p-2} + \dots, \\ y &= C_{2p+1}^1 u^{2p} a^p t - C_{2p+1}^3 u^{2p-2} a^{p-1} b t^3 + \dots \end{aligned}$$

On a ainsi *un* système de solutions, avec deux entiers arbitraires u et t , de l'équation proposée qui présente une grande généralité.

II. Soit l'équation

$$x^2 + by^2 = z^m,$$

m étant un entier quelconque.

Posons

$$z = u^2 + bt^2,$$

nous pourrions poser

$$x + yi\sqrt{b} = (u + ti\sqrt{b})^m$$

et prendre

$$\begin{aligned}x &= u^m - C_m^2 b t^2 u^{m-2} + \dots, \\y &= C_m' u^{m-1} t - C_m^3 u^{m-3} t^3 b + \dots,\end{aligned}$$

et l'on a *un* système de solutions, avec deux entiers arbitraires *u* et *t*, de l'équation.

III. Soit l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^2,$$

A et N étant deux entiers positifs donnés.

On a

$$x^2 = (y i \sqrt{A} + N)(y i \sqrt{A} - N).$$

Posons

$$x = (u i \sqrt{A} + t)(u i \sqrt{A} - t).$$

d'où

$$t^2 - A u^2 = N, \quad 2tu = y,$$

$$x = A u^2 + t^2, \quad x + y \sqrt{A} = (u \sqrt{A} + t)^2.$$

Considérons

$$\begin{aligned}x_1 + y_1 \sqrt{A} &= (y \sqrt{A} + x)^2 = (u \sqrt{A} + t)^{2.2}, \\x_2 + y_2 \sqrt{A} &= (y_1 \sqrt{A} + x_1)^2 = (u \sqrt{A} + t)^{2.2.2}, \\&\dots\dots\dots, \\x_p + y_p \sqrt{A} &= (u \sqrt{A} + t)^{2^{p+1}}.\end{aligned}$$

On voit que, si l'on connaît une solution entière *u*, *t* de l'équation

$$t^2 - A u^2 = N,$$

on en déduira une solution entière *x*, *y* de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^2.$$

puis une solution entière *x*₁, *y*₁ de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^4,$$

puis une solution *x*₂, *y*₂ de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^8,$$

et ainsi de suite.

En particulier, nos formules donnent une suite de solutions de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

quand on connaît une première solution; soient $x = \alpha$, $y = \beta$ cette solution; p étant un entier quelconque, les valeurs α_p, β_p , données par l'égalité

$$\alpha_p + \beta_p \sqrt{A} = (\alpha + \beta \sqrt{A})^{2p+1},$$

formeront une solution; et les valeurs $N^h \alpha_p$ et $N^h \beta_p$ formeront une solution de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^{2h}.$$

On connaît l'application des fractions continues à l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

IV. Soient des quantités successives $a, a_1, a_2, \dots$, liées par la relation récurrente

$$a_k = 2a_{k-1}^2 - 1.$$

Posons

$$a^2 - Au^2 = 1, \quad y_1 = 2au,$$

$$a_1 = Au^2 + a^2 = 2a^2 - 1,$$

$$a_1 + y_1 \sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^2,$$

$$a_2 + y_2 \sqrt{A} = (a_1 + y_1 \sqrt{A})^2,$$

d'où

$$a_2 = a_1^2 + Ay_1^2 = 2a_1^2 - 1$$

et

$$a_2 + y_2 \sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^{2^2},$$

$$a_2 = A^2 u^4 + 6A^2 Au^2 + a^4 = (a^2 - 1)^2 + 6a^2(a^2 - 1) + a^4.$$

En posant

$$2^p = 2m, \quad m = 2^{\nu-1},$$

on aura

$$a_p + y_p \sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^{2^m},$$

$$a_p = (Au^2)^m + C_{2^m}^2 a^2 (Au^2)^{m-1} + \dots,$$

$$a_p = (a^2 - 1)^m + C_{2^m}^2 a^2 (a^2 - 1)^{m-1} + \dots$$

On peut rapprocher cette formule de celle qui donne le développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, tiré de la formule de Moivre dans le cas particulier où m est une puissance de 2 ; mais le procédé actuel pour trouver la valeur de a_p est affranchi de la considération des imaginaires. On trouve, en développant,

$$\begin{aligned} 2a_p = (2a)^{2m} - \frac{2m}{1} (2a)^{2m-2} + \frac{2m(2m-3)}{1.2} (2a)^{2m-4} \\ - \frac{2m(2m-5)(2m-7)}{1.2.3} (2a)^{2m-6} \\ + \frac{2m(2m-7)(2m-9)(2m-11)}{1.2.3.4} (2a)^{2m-8} - \dots \end{aligned}$$

V. En remplaçant, dans la loi de récurrence indiquée, $a_p, a_{p-1}, \dots$ par $\lambda a_p + \beta, \lambda a_{p-1} + \beta$, on voit que l'équation aux différences finies

$$\varphi(n) = A[\varphi(n-1)]^2 + B\varphi(n-1) + C$$

peut s'intégrer au moyen du développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$, quand on a la relation

$$C = \frac{B^2 - B - 2}{2A}.$$

Considérons encore des quantités $a_1, a_2, \dots, a_p$, liées par la formule de récurrence

$$a_p = 4a_{p-1}^3 - 3a_{p-1}.$$

Si a_1 est moindre que 1, on pourra poser

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\varphi, \\ a_2 &= \cos 3\varphi, \\ a_3 &= \cos 3^2\varphi, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

donc, dans ce cas, a_p s'obtiendra en fonction de a_1 par le développement connu de $\cos m\varphi$; le résultat trouvé ainsi subsiste évidemment, même quand a_1 est plus grand que 1, c'est-à-dire quelconque.

En posant

$$\alpha_p = \lambda \varphi(p) + \beta,$$

on voit que l'équation

$$\begin{aligned} \varphi(n) = & A[\varphi(n-1)]^3 + B[\varphi(n-1)]^2 \\ & + \frac{B^2 - 9A}{3A} \varphi(n-1) + \frac{B^3 - 36AB}{27A^2} \end{aligned}$$

s'intègre au moyen du développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos \varphi$.

On peut continuer l'application de ce procédé. On généralise les formules précédentes, en remplaçant $\varphi(n)$ par une fonction rationnelle ou même irrationnelle de $\psi(n)$, en désignant par $\psi(n)$ une fonction nouvelle, et l'on arrive ainsi à former des équations aux différences finies que l'on intègre par le procédé indiqué, et dont l'intégration directe présente des difficultés.