

WEILL

## Sur une identité algébrique

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1885), p. 184-188

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1885\\_3\\_4\\_\\_184\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__184_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR UNE IDENTITÉ ALGÈBRIQUE;

PAR M. WEILL.

---

Je me propose de trouver quatre polynômes entiers satisfaisant à l'identité

$$X^2Y + Y^2Z + Z^2U - U^2X = 0.$$

En posant

$$Y = \lambda X, \quad Z = \mu X, \quad U = \rho X,$$

on a

$$\lambda + \lambda^2\mu + \mu^2\rho + \rho^2 = 0;$$

d'où

$$1 - 4\mu(\mu^2\rho + \rho^2) = K^2, \quad \lambda = \frac{-1 \pm K}{2\mu}$$

et

$$\mu^6 - \mu(K^2 - 1) = L^2, \quad \rho = \frac{-\mu^3 \pm L}{2\mu}.$$

On peut écrire la dernière équation sous la forme

$$\mu^6 - L^2 = \mu(K^2 - 1).$$

( 185 )

On satisfera à cette relation si l'on prend

$$\mu^3 - L = \mu h (K - 1), \quad \mu^3 + L = \frac{K - 1}{h},$$

d'où

$$K = \frac{2\mu^3 h + \mu h^2 - 1}{\mu h^2 + 1}, \quad L = \frac{\mu^3 - \mu^4 h^2 + 2\mu h}{\mu h^2 + 1}.$$

A ces valeurs correspondent, pour  $\rho$  et  $\lambda$ , les valeurs

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{h - h^2 \mu^3}{\mu h^2 + 1}, & \rho'' &= \frac{-h - \mu^2}{\mu h^2 + 1}, \\ \lambda' &= \frac{\mu^3 h - 1}{\mu(\mu h^2 + 1)}, & \lambda'' &= \frac{-h^2 - \mu^2 h}{\mu h^2 + 1}, \end{aligned}$$

Si l'on associe une des valeurs de  $\rho$  avec une des valeurs de  $\lambda$ , successivement, on obtient quatre systèmes de solutions. Considérons le système  $\rho'$ ,  $\lambda'$ .

Il donne

$$U = h \frac{X^3 - hZ^3}{X^2 + Xh^2Z}, \quad Y = \frac{-UX}{hZ};$$

d'où

$$U = h(X - h^2Z) + \frac{h^2Z^2}{X} \frac{Xh^3 - Z}{X + h^2Z}.$$

On peut poser

$$\begin{aligned} Xh^3 - Z &= P(X + h^2Z), \\ h^2Z^2P &= RX, \end{aligned}$$

et l'on a successivement

$$\begin{aligned} Z(P h^2 + 1) &= X(h^3 - P), \\ X &= Q(P h^2 + 1), \\ Z &= Q(h^3 - P), \\ h^2 Q^2 (h^3 - P)^2 P &= RQ(P h^2 + 1), \\ Q &= S(P h^2 + 1), \\ R &= S h^2 P (h^3 - P)^2, \\ Y &= \frac{-UX}{hZ} = \frac{-X[X - h^2Z + S h P (h^3 - P)^2]}{Z}; \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant  $X$  et  $Z$  par leurs valeurs,

$$S = T(h^3 - P).$$

On peut faire, d'ailleurs,  $T = 1$ , et l'on obtient les formules suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} X = (h^3 - P)(Ph^2 + 1)^2, \\ Z = (h^3 - P)^2(Ph^2 + 1), \\ Y = -(Ph^2 + 1)(P^3h + 3Ph^2 - h^5 + 1), \\ U = h(h^3 - P)(P^3h + 3Ph^2 - h^5 + 1) \end{cases}$$

Si l'on remplace  $X, Y, Z, U$  par leurs valeurs dans l'identité proposée, on obtient

$$(A) \quad h(P - h^3)^3 + (Ph^2 + 1)^3 \equiv (1 + h^5)(P^3h + 3Ph^2 - h^5 + 1).$$

L'identité (A) va nous donner des résultats relatifs à certaines équations indéterminées; et d'abord, elle donne une infinité de solutions, avec un paramètre arbitraire  $\lambda$ , de l'équation

$$ax^3 + y^3 = (1 + a^5)z.$$

Ce sont

$$\begin{aligned} x &= \lambda - a^3, \\ y &= \lambda a^2 + 1, \\ z &= \lambda^3 a + 3\lambda a^2 - a^5 + 1 \end{aligned}$$

De même, l'équation

$$x^3 + y^3 = (1 + a^{15})z$$

admet comme solutions

$$\begin{aligned} x &= \lambda a - a^{10}, \\ y &= 1 - \lambda a^6, \\ z &= \lambda^3 a^3 + 3\lambda a^6 - a^{15} - 1 \end{aligned}$$

Dans l'identité (A) posons  $P = xh^3$  et disposons de  $z$  de manière que la fonction

$$P^3h - 3Ph^2 - h^5 + 1$$

soit carré parfait; on trouve  $z = 1$ , solution illusoire, et  $z = \frac{1}{4}$ ; on en déduit, après quelques transformations et en posant  $h^5 = z$ , l'identité fort simple

$$(B) \quad (z + \frac{1}{4})^2 - 2z^2 - (1 - z)(z - 8)$$

De cette identité, résulte *une* solution d'une classe d'équations indéterminées ;  $a$  et  $m$  étant deux entiers quelconques, l'équation

$$x^3 + y^3 = (1 + a^{3m}) z^2$$

a pour solution

$$x = -3a^{2m},$$

$$y = a^{3m} + 4,$$

$$z = a^{3m} - 8.$$

L'équation

$$a^2 x^2 + y^3 = (1 + a^{3m+1}) z^2$$

admet comme solution

$$x = -3a^{2m},$$

$$y = 4 + a^{3m+1},$$

$$z = a^{3m+1} - 8.$$

Enfin l'équation

$$a x^3 + y^3 = (1 + a^{3m+2}) z^2$$

admet comme solution

$$x = -3a^{2m+1},$$

$$y = 4 + a^{3m+2},$$

$$z = a^{3m+2} - 8.$$

L'identité (B) se généralise en remplaçant  $z$  par  $\frac{z}{t}$  et donne

$$(C) \quad (z - 4t)^3 - 27tz^2 = (z + t)(z - 8t)^2.$$

Elle fournit *une* solution de nouvelles équations indéterminées, que l'on forme aisément, et qui sont

$$x^3 + y^3 = b(1 + a^{3m})z^2,$$

$$x^3 + b^2y^3 = b(1 + ba^{3m})z^2,$$

$$x^3 - by^3 = b(1 + b^2a^{3m})z^2,$$

$$a^2x^3 + y^3 = b(1 + a^{3m+1})z^2,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$ax^2 + bz^2 = z^3.$$

Reprenons l'étude du système  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  et la valeur

$$U = (X - h^2 Z)h + \frac{h^2 Z^2}{X} \frac{X h^3 - Z}{X + h^2 Z}.$$

On peut poser

$$\begin{aligned} X h^3 - Z &= R X, \\ h^2 Z^2 R &= S (X + h^2 Z). \end{aligned}$$

En développant les calculs, on arrive à une solution très simple du problème et qui est donnée par les formules

$$(II) \quad \begin{cases} X = P(1 + P h^2), \\ Y = h P^3 - 1, \\ Z = P^2(1 + P h^2), \\ U = h P(1 - h P^3). \end{cases}$$

Le système  $\varphi'$ ,  $\lambda''$  donne la solution

$$(III) \quad \begin{cases} X = (P h^2 + 1)^2, \\ Y = -h(P h^2 + 1)(P^2 + h), \\ Z = (P h^2 + 1)(h^3 - P), \\ U = h(P^3 h + 3 P h^2 - h^3 + 1). \end{cases}$$

Le système  $\varphi''$ ,  $\lambda''$  donne la solution

$$(IV) \quad \begin{cases} X = 1 - h^2 Z, \\ U = 2 h^3 Z - h - Z^2 (h^3 + 1), \\ Y = -2 h^4 Z + h^2 + h Z^2 (h^3 + 1). \end{cases}$$

Toutes ces formules, dans lesquelles  $P$  et  $h$  sont des quantités quelconques, peuvent se généraliser en remplaçant  $P$  et  $h$  par  $\frac{A}{B}$  et  $\frac{C}{D}$ , et supprimant ensuite le dénominateur commun ; il ne restera plus qu'à remplacer  $A, B, C, D$  par des polynômes entiers par rapport à des variables quelconques, pour avoir des systèmes de solutions comportant une très grande indétermination ; de là on pourra tirer un nombre indéfini de nouvelles identités algébriques.