

H. PICQUET

Sur l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 183-184

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__183_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ENVELOPPE DES DROITES QUI COUPENT DEUX CERCLES HARMONIQUEMENT;

PAR M. H. PICQUET.

J'ai démontré dans ma *Géométrie analytique* (p. 508), comme conséquence de propriétés des invariants communs à deux coniques, que *l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles et tangente aux tangentes à ces cercles en leurs points d'intersection*. En voici une autre démonstration qui n'a peut-être pas été remarquée.

Soient O et O' les centres des deux cercles, R et R' leurs rayons, A et B leurs points d'intersection supposés réels : d'après la définition de la conique en question, le cercle O'', lieu des projections des foyers sur les tangentes, passe par les points A et B. Cela posé, soient α et β les points d'intersection d'une tangente quelconque de cette conique avec le cercle O, soient γ et δ ses points d'intersection avec le cercle O'. Projetons le point O en C sur cette droite; C est le milieu de $\alpha\beta$ et appartient au cercle O''. On a donc

$$\overline{CO}^2 + \overline{CO'}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AO'}^2 = R^2 + R'^2$$

ou

$$R^2 - \overline{CO}^2 = \overline{CO'}^2 - R'^2.$$

ou

$$\overline{C\alpha}^2 = C\gamma.C\delta.$$

C. Q. F. D.

N. B. — Cette démonstration ne préjuge rien sur la réalité des points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; elle prouve que, quoi qu'il arrive, ils sont conjugués harmoniques. Mais on sait qu'alors, si deux points conjugués sont imaginaires conjugués, les deux autres sont nécessairement réels : il suit de là qu'un des deux couples $\alpha\beta, \gamma\delta$ est toujours réel.

Si les points d'intersection A et B des deux cercles étaient imaginaires, il est clair qu'aucune droite réelle ne pourrait rencontrer les deux cercles en quatre points harmoniques.
