

L. MIRMAN

**Sur les fonctions homogènes de deux
polynômes U et V , premiers entre eux
et de même degré en x**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 173-176

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__173_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES DE DEUX POLYNÔMES U
ET V, PREMIERS ENTRE EUX ET DE MÊME DEGRÉ EN x ;**

PAR M. L. MIRMAN,
Élève du lycée Saint-Louis.

Soient deux polynômes U et V premiers entre eux, et de degré m, et soit une fonction homogène et entière de U et V

$$F(U, V) = U^p + A_1 U^{p-1} V + \dots + A_{p-1} U V^{p-1} + A_p V^p;$$

les racines communes aux équations $UV' - VU' = 0$ (U', V' étant les dérivées de U et V) et $F(U, V) = 0$ sont racines multiples de cette dernière.

Réciproquement, si la fonction homogène $F(U, V)$ n'a pas en U et V de facteur multiple $(aU + bV)^k$, les racines multiples de l'équation $F(U, V) = 0$ sont racines de $UV' - VU' = 0$.

En effet, la dérivée peut s'écrire

$$F' = p U^{p-1} U' + \dots - A_k [(p-k) U^{p-k-1} U' V^k + k U^{p-k} V^{k-1} V'] + \dots + p A_p V^{p-1} V'.$$

Soit α une racine commune à $F = 0$ et à $UV' - VU' = 0$. Soient u, v, u', v' les valeurs des polynômes correspondants pour cette valeur particulière de la variable; u et v sont différents de zéro, car, si u était nul, l'équation $F = 0$ montre que v devrait l'être aussi, ce qui est impossible, puisque U et V sont premiers entre eux.

On peut donc écrire

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} - t.$$

Remplaçons u' et v' par leurs valeurs dans la dérivée F' ; nous aurons

$$F' = l_p u^p + \dots + A_k [(p-k) l u^{p-k} v^k + k l u^{p-k} v^k] + \dots + p l v^p$$

ou

$$F' = l_p F,$$

et, comme $F = 0$, on a aussi $F' = 0$; donc cette racine α annule la dérivée F' : c'est donc une racine multiple de F .

Réciproquement, soit α une racine multiple de F ; je dis que, pour cette valeur, on a

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}.$$

Posons

$$\frac{u'}{u} = l, \quad \frac{v'}{v} = l + h;$$

je vais démontrer que h est nul.

En effet, en remplaçant, dans F' , u' et v' par ces valeurs, on aura

$$l_p u^p + A_1 [(p-1) l u^{p-1} v + (l+h) u^{p-1} v] + \dots \\ + A_k [(p-k) l u^{p-k} v^k + k(l+h) u^{p-k} v^k] + \dots + (l+h) p v^p = 0.$$

ou

$$l_p F + h(\Lambda_1 u^{p-1} v + 2 \Lambda_2 u^{p-2} v^2 + \dots + k \Lambda_k u^{p-k} v^k + \dots + p \Lambda_p v^p) = 0.$$

Comme F est nul, il suffit de démontrer que la quantité entre parenthèses est différente de zéro; il suffit donc de faire voir que ce polynôme entier en x ,

$$\Phi = \Lambda_1 U^{p-1} V + \dots + k \Lambda_k U^{p-k} V^k + \dots + p \Lambda_p V^p,$$

ne peut avoir de racine commune avec le polynôme F .

En effet, posons

$$\frac{U}{V} = \rho;$$

nous pouvons écrire

$$F = V^p(\rho^p + A_1\rho^{p-1} + \dots + A_k\rho^{p-k} + \dots + \lambda_p),$$

$$\Phi = V^p(A_1\rho^{p-1} + 2A_2\rho^{p-2} + \dots + kA_k\rho^{p-k} + \dots + p\lambda_p).$$

Or, supposons que F et Φ , ou ce qui revient au même, puisque V ne peut être nul dans ces conditions, que les quantités entre crochets s'annulent toutes deux pour $x = \alpha$, c'est-à-dire pour $\rho = \beta$. Désignons ces polynômes entiers en ρ par $f(\rho)$ et $\varphi(\rho)$. On vérifiera facilement que l'on a identiquement

$$pf(\rho) = \rho f'(\rho) + \varphi(\rho);$$

donc cette valeur $\rho = \beta$ annulerait $f'(\rho)$ ⁽¹⁾ et serait racine multiple de $f(\rho)$. Si donc nous supposons que $f(\rho)$ n'a pas en ρ de racine multiple, c'est-à-dire que $F(U, V)$ n'admet pas de facteur de forme $(aU + bV)^k$, F et Φ ne peuvent avoir en x de racine commune; donc $h = 0$, et la racine multiple considérée α annule

$$UV' - VU' = 0.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — L'expression $UV' - VU'$, où U et V sont des polynômes de degré m , est de degré $2m - 2$; donc, si la fonction homogène $F(U, V)$ satisfait à la condition énoncée, l'équation $F(U, V) = 0$, de degré p en U et V , de degré mp en x , ne peut avoir en x plus de $2(m - 1)$ racines doubles, quel que soit p .

Autre corollaire. — L'expression

$$\frac{UV' - VU'}{\sqrt{F(U, V)}}$$

[les coefficients de U et V étant tels que F ait $2(m - 1)$

⁽¹⁾ À moins que $\beta = 0$, mais alors A_p serait nul, et l'on mettrait α en facteur dans le coefficient de h .

racines doubles] peut s'écrire

$$\frac{1}{M\sqrt{f(x)}},$$

M étant une constante, et $f(x)$ un polynôme entier en x de degré

$$mp - 4m - 4 \quad \text{ou} \quad m(p - 4) + 4.$$

Cette proposition est une généralisation d'un théorème de Jacobi qu'on peut énoncer de la façon suivante :

Si l'on considère l'expression

$$\frac{UV' - VU'}{\sqrt{AU^4 + BU^3V + CU^2V^2 + DUV^3 + EV^4}},$$

et qu'on détermine les coefficients de U et V, de façon que le polynôme sous le radical ait toutes ses racines doubles, sauf quatre, l'expression peut s'écrire

$$\frac{1}{M\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}.$$

Cas particuliers :

1° Toute racine double de $aU + bV = 0$ est racine de $UV' - VU' = 0$.

2° Toute racine double de $aU^2 + 2bUV + cV^2 = 0$ est racine de $UV' - VU' = 0$ si $b^2 - ac$ est $\neq 0$.