

N. IOUKOVSKY

Sur une démonstration nouvelle du théorème de Lambert

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 90-96

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__90_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE DÉMONSTRATION NOUVELLE DU THÉORÈME
DE LAMBERT;**

PAR M. N. IOUKOVSKY.

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

I. Nous proposons ici une démonstration nouvelle du théorème de Lambert, fondée sur la formule de la varia-

tion d'action

$$(1) \quad \delta \int v ds = v_2 \delta \sigma_2 \cos(v_2 \delta \sigma_2) - v_1 \delta \sigma_1 \cos(v_1 \delta \sigma_1),$$

où v_1 et v_2 sont les vitesses d'un point matériel à l'origine et à la fin de la trajectoire AB; $\delta \sigma_1$ et $\delta \sigma_2$ sont les déplacements AA' et BB' des points A et B, quand la trajectoire AB se change en une trajectoire infiniment voisine A'B'.

2. La formule (1), donnant la variation de l'action, peut servir aussi à la détermination de la variation du temps de mouvement des planètes, à cause du lemme suivant :

Le temps dans lequel la planète, sollicitée par le Soleil F, parcourt l'arc elliptique AB, est égal à la fraction $\frac{\mu}{a}$ multipliée par l'action du mouvement de la planète sur le même arc elliptique AB, le Soleil étant transporté du foyer F dans l'autre foyer F', de l'ellipse.

μ est le coefficient de l'attraction, et $2a$ est le grand axe de l'orbite elliptique.

Le temps t , dans lequel la planète parcourt l'arc AB, est

$$(2) \quad t = \int \frac{ds}{v},$$

où la vitesse v peut être définie comme une fonction d'un rayon vecteur r par rapport au Soleil F :

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}.$$

Mais, si le rayon vecteur de la planète par rapport au foyer F₁ est r_1 ,

$$(3) \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r_1}{r}};$$

d'où

$$(4) \quad t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int \sqrt{\frac{r}{r_1}} ds.$$

Le Soleil étant transporté dans le foyer F_1 , la vitesse de la planète se change en

$$(5) \quad v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r}{r_1}}.$$

En y substituant cette valeur de v_1 dans la formule (4), nous avons

$$(6) \quad t = \frac{\mu}{a} \int v_1 ds.$$

Le lemme est donc démontré.

3. Revenons à la démonstration du théorème de Lambert :

Le temps dans lequel la planète parcourt l'arc elliptique AB est une fonction seulement de la corde 2c de l'arc parcouru, de la somme 2x des rayons vecteurs des points A et B par rapport au Soleil, et du grand axe 2a.

Les points A et B étant pris pour les foyers, construisons (*fig. 1*) sur la corde 2c deux ellipses confocales dont les grands axes sont

$$\begin{aligned} CD &= 2x, \\ EG &= 4a - 2x. \end{aligned}$$

La première de ces ellipses passera par le Soleil parce que

$$(7) \quad FA + FB = 2x,$$

et la seconde passera par l'autre foyer F_1 de l'orbite,

parce que, en soustrayant la somme des deux relations

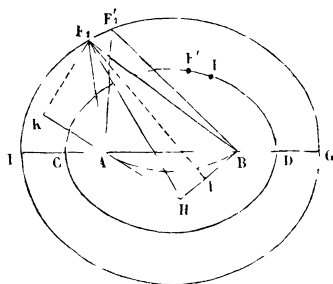
$$(8) \quad \begin{cases} F_1 A - FA = 2\alpha. \\ F_1 B + FB = 2\alpha \end{cases}$$

de la formule (7), nous aurons

$$(9) \quad F_1 A + F_1 B = 4\alpha - 2\alpha.$$

Supposons que, α et c restant constants, le Soleil soit transporté du point F dans un point infiniment voisin F' de la même ellipse CD , et cherchons la variation

Fig. 1.



du temps t de passage de la planète du point A au point B . A cause du lemme établi, cette variation est égale à la fraction $\frac{h}{\alpha}$ multipliée par la variation de l'action dans le mouvement de la planète du point A jusqu'au point B , subie par la transposition du Soleil du point F dans un point infiniment voisin F' de la même ellipse EG .

Cela posé, nous avons, par la formule (1),

$$(10) \quad \delta t = \frac{h}{\alpha} [c_2 \delta \sigma_2 \cos(\delta \sigma_2 \nu_2) - c_1 \delta \sigma_1 \cos(\delta \sigma_1 \nu_1)],$$

ou $\delta \sigma_1$ et $\delta \sigma_2$ sont les déplacements des points A et B dans le mouvement de translation du triangle $A F' B$ par

lequel le point F'_1 est amené au point F_1 , c'est-à-dire

$$\partial\sigma_1, \partial\sigma_2, F_1F'_1.$$

Soient AH et BH les tangentes de l'orbite elliptique aux points A et B. A cause d'un théorème de Géométrie, la ligne F_1H est la bissectrice de l'angle AF_1B , c'est-à-dire elle est normale à l'ellipse EG; d'où

$$\cos(\partial\sigma_1\epsilon_1) = \sin(AHF_1),$$

$$\cos(\partial\sigma_2\epsilon_2) = \sin(BHF_1).$$

Menons du point F_1 deux perpendiculaires F_1K et F_1L sur les lignes AH et BH, et écrivons, à cause du principe des aires,

$$\epsilon_1 F_1K = \epsilon_2 F_1L;$$

d'autre part, on a

$$F_1K = F_1H \sin(AHF_1) = F_1H \cos(\partial\sigma_1\epsilon_1),$$

$$F_1L = F_1H \sin(BHF_1) = F_1H \cos(\partial\sigma_2\epsilon_2),$$

et, par suite,

$$\epsilon_1 \cos(\partial\sigma_1\epsilon_1) = \epsilon_2 \cos(\partial\sigma_2\epsilon_2),$$

d'où il vient, par la formule (10),

$$\partial t = 0.$$

Ainsi, a , c , α restant constants, le temps t ne change pas, c'est-à-dire qu'il dépend seulement de ces variables, ce qu'il s'agissait d'établir.

4. Le théorème étant démontré, il est facile de réduire la détermination du temps de mouvement de la planète à la détermination du temps dans le mouvement rectiligne.

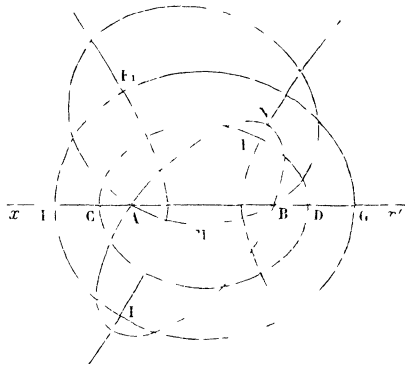
En y soustrayant les formules (8), nous recevons

$$FA - FB = F_1B - F_1A.$$

Cette équation montre que les foyers F et F_1 de l'orbite elliptique se trouvent sur la même hyperbole con-

focale aux ellipses CD et EG. Ainsi (fig. 2) à la position donnée du Soleil F et de la corde AB correspondent deux

Fig. 2



orbites elliptiques FF_1 et FF_2 . A la limite, pour $a = \infty$, les points F_1 et F_2 s'éloigneront à l'infini, et les ellipses se changeront en des paraboles, ayant les axes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Par le théorème de Lambert, nous pouvons transporter le Soleil du point F dans un point D de l'ellipse CD, en y conservant le temps t .

Cela posé, les branches de l'hyperbole doivent se confondre avec les lignes droites Bx' et Ax , et les orbites elliptiques FF_1 et FF_2 avec la ligne droite DE, parce que

$$DE = 2a - a + a = 2a.$$

Le temps t peut être déterminé par la formule (4), en y posant

$$ds = dr,$$

et en prenant

$$11) \quad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\alpha}^{\alpha+c} \sqrt{\frac{r}{2a-r}} dr$$

pour l'arc AMB, et

$$(12) \quad t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int_0^{\alpha-c} \sqrt{\frac{r}{2a-r}} dr + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int_0^{\alpha+c} \sqrt{\frac{r}{2a-r}} dr$$

pour l'arc ANB.

De ces formules nous tirons, en intégrant la formule de Lambert,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} t &= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left[\left(\arccos \frac{a-z-c}{a} - \sin \arccos \frac{a-z-c}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. \mp \left(\arccos \frac{a-z+c}{a} - \sin \arccos \frac{a-z+c}{a} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où l'orbite est parabolique,

$$\lim \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{\frac{r}{2a-r}} = \sqrt{\frac{r}{2\mu}},$$

et les égalités (11) et (12) donnent la formule d'Euler

$$(14) \quad t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}} \left[(z+c)^{\frac{3}{2}} \mp (z-c)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Le signe (—) doit être pris dans ces formules, si le Soleil est en dehors du contour formé par l'arc et la corde AB, et le signe (+) s'il est à l'intérieur de ce contour.

5. La même méthode de raisonnement peut être employée pour la détermination du temps dans le mouvement hyperbolique; seulement, en y transposant le Soleil dans le lemme du n° 2, il faudra changer sa force attractive en répulsive.
