

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 531-543

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__531_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 487

(voir 1^{re} série, t. XVIII, p. 357);

PAR M. H. BROCARD.

Dans tout tétraèdre : 1° Les quatre hauteurs donnent lieu, prises deux à deux, à six plus courtes distances parallèles aux six arêtes du tétraèdre; 2° ces six plus

courtes distances donnent lieu, prises deux à deux, à quinze plus courtes distances dont douze sont nulles, et dont les trois autres sont parallèles aux trois plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre.

1° Désignons par A, B, C, D les plans des faces opposées aux sommets a, b, c, d du tétraèdre; par $\delta(a, b)$ la plus courte distance des hauteurs aH, bH partant des sommets a et b .

Par définition, $\delta(a, b)$ est parallèle à une droite située dans le plan perpendiculaire à chacune des hauteurs aH, bH . Donc $\delta(a, b)$ est parallèle à l'arête d'intersection des plans A, B, c'est-à-dire à l'arête cd du tétraèdre.

Il y a quatre hauteurs, c'est-à-dire $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ plus courtes distances parallèles à chacune des arêtes du tétraèdre.

2° Les six plus courtes distances, prises deux à deux, donnent $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ plus courtes distances.

La plus courte distance entre $\delta(a, b)$ et $\delta(c, d)$, par exemple, est perpendiculaire à chacune de ces droites; mais ces droites sont parallèles aux arêtes ab, cd du tétraèdre; donc la plus courte distance en question est parallèle à la plus courte distance de ces arêtes opposées. Or, il y a trois couples d'arêtes opposées (ab, cd ; ac, bd ; ad, bc). Il y a donc trois plus courtes distances parallèles aux plus courtes distances de ces arêtes.

Reste à démontrer que les douze autres sont nulles. $\delta(a, b)$, par exemple, est parallèle à cd ; $\delta(a, c)$ est parallèle à bd ; donc la plus courte distance entre $\delta(a, b)$ et $\delta(a, c)$ est parallèle à la plus courte distance entre cd et bd . Mais ces droites se rencontrent. Ainsi la plus courte distance entre ces droites est nulle et n'a pas de

direction déterminée. De cette indétermination résulte que la plus courte distance en question est nulle.

Question 1437

(voir 1^{re} série, t. II, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

u_n désignant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Lamé, on a

$$(2u + 1)^n - u^{3n} = 0,$$

pourvu que l'on remplace les exposants par des indices. (E. CESARO.)

Soit la série de Lamé

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

dont chaque terme, à partir du troisième, est égal à la somme des deux qui le précèdent. On a, d'après la loi de formation,

$$u_{3(n+1)} = u_{3n+2} + u_{3n+1} = u_{3n+1} + u_{3n} + u_{3n+1};$$

d'où

$$u_{3(n+1)} = 2u_{3n+1} + u_{3n},$$

ou symboliquement

$$u^{3(n+1)} = u^{3n}(2u + 1),$$

les exposants de u devant être remplacés par des indices.

Or

$$u^3 = (2u + 1);$$

donc

$$u^6 = (2u + 1)^2,$$

$$u^9 = (2u + 1)^3,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$u^{3n} = (2u + 1)^n,$$

ou

$$(2u + 1)^n - u^{3n} = 0, \text{ symboliquement.}$$

Note. — La même question a été résolue par M. A. Droz.

Question 1454

(voir 3^e série, t II, p. 336),

PAR M. H. FAURE.

On donne une sphère et un point dans son intérieur ; de ce point on mène trois cordes, telles que le pôle du plan de deux quelconques d'entre elles soit sur la troisième : la somme des inverses des carrés de ces cordes est constante. (MANNHEIM.)

A la page 13 du tome XVI des *Nouvelles Annales*, 2^e série, j'ai démontré le théorème suivant :

La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué à une surface du second ordre est égale au carré de la distance du centre de la surface au sommet du trièdre, diminué de la somme des carrés des demi-axes de la surface, et divisé par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire.

Si l'on suppose que la surface du second degré est une sphère, on a le théorème de M. Mannheim.

Si l'on désigne, en effet, par λ , μ , ν les arêtes du trièdre, par S^2 la somme des carrés des demi-axes de la surface, par o son centre, par a le sommet du trièdre, notre théorème donne

$$\frac{1}{I_\lambda} + \frac{1}{I_\mu} + \frac{1}{I_\nu} = \frac{S^2 - oa^2}{I_a}.$$

Si donc λ , μ , ν sont les longueurs des cordes déterminées dans la surface par les droites λ , μ , ν ; et λ_1 , μ_1 , ν_1 les demi-diamètres parallèles à ces cordes,

$$I_\lambda = -\frac{\lambda^2}{4\lambda_1^2}, \quad I_\mu = -\frac{\mu^2}{4\mu_1^2}, \quad I_\nu = -\frac{\nu^2}{4\nu_1^2};$$

on a donc la relation

$$\frac{\lambda_1^4}{\lambda^2} + \frac{\mu_1^4}{\mu^2} + \frac{\nu_1^4}{\nu^2} = \frac{oa^2 - S^2}{4I_a}.$$

Maintenant, si la surface devient une sphère de rayon R,

$$I_a = \frac{oa^2 - R^2}{R^2},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} = \frac{oa^2 - 3R^2}{4R^2(oa^2 - R^2)}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Genty et Moret-Blanc.

Question 1455

(voir 3^e série, t. II. p. 336);

PAR M. E. BARISIEN,

Lieutenant au 141^e de ligne.

On considère deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites; le lieu des foyers des paraboles tangentes, à la fois, aux deux droites et à la circonférence, est une circonférence tangente aux deux droites. (WEILL.)

Prenons les deux droites rectangulaires OX, OY pour axes de coordonnées. Soient r le rayon du cercle, A, B les points de contact de la parabole avec les axes OX, OY; et P, Q les points où la tangente, commune en M au cercle et à la parabole, rencontre ces mêmes axes (1).

Posons

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad OP = p, \quad OQ = q.$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que l'équation générale des paraboles tangentes aux trois côtés OP, OQ, PQ d'un triangle rectangle peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad \sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{\beta}} = 1,$$

avec la condition

$$(2) \quad \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} = 1 \quad (1).$$

Nous allons exprimer que le cercle et la parabole sont tangents au même point M à la droite PQ. Pour cela, commençons par écrire que PQ est tangent au cercle en M, puis ensuite que le point M de contact est sur la parabole.

Le triangle rectangle POQ donne

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2,$$

ou

$$(MP + MQ)^2 = p^2 + q^2.$$

Mais

$$MP = p - r \quad \text{et} \quad MQ = q - r;$$

donc

$$(p + q - 2r)^2 = p^2 + q^2,$$

$$(3) \quad p + q - 2r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

relation qui revient à

$$(4) \quad pq = 2r(p + q - r).$$

Actuellement, menons du point M les perpendiculaires MR, MS aux axes OX, OY. Les coordonnées x, y de M s'obtiennent facilement au moyen des triangles semblables MSQ, MRP et OPQ. En effet

$$\frac{MS}{MQ} = \frac{OP}{PQ}; \quad \text{d'où } MS \quad \text{ou } x = \frac{p(q-r)}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p(q-r)}{p+q-2r}.$$

(1) Les formules (1) et (2) ont déjà été employées dans les *Nouvelles Annales* (voir 2^e série, t. XI, p. 88).

De même

$$y = \frac{q(p-r)}{p+q-2r}.$$

En portant ces valeurs des coordonnées du point M dans l'équation (1) de la parabole, équation qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1\right)^2 = \frac{4xy}{\alpha\beta},$$

on a

$$\left[\frac{p(q-r)}{\alpha} + \frac{q(p-r)}{\beta} - (p+q-2r)\right]^2 = \frac{4pq}{\alpha\beta}(q-r)(p-r),$$

ou

$$\begin{aligned} & \left[pq\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - r\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right) - (p+q) + 2r\right]^2 \\ &= \frac{4pq}{\alpha\beta} [pq - r(p+q-r)]. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations (2) et (4), il vient

$$\left[pq\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - \frac{pq}{2r}\right]^2 = \frac{4pq}{\alpha\beta} \left(pq - \frac{pq}{2}\right).$$

et enfin

$$(5) \quad \alpha\beta\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2r}\right)^2 = 2.$$

Le foyer F de la parabole est à l'intersection de la droite AB et de la perpendiculaire OF abaissée du point O sur AB. Ces deux droites ont pour équations

$$(6) \quad \beta x + \alpha y = \alpha\beta,$$

$$(7) \quad \alpha x - \beta y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il suffit d'éliminer α et β entre les équations (5), (6) et (7).

Or des équations (6) et (7) on tire

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad \beta = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

En portant ces valeurs de x , y dans l'équation (5),
on a

$$[x^2 + y^2 - 2r(x + y)]^2 = 8r^2xy;$$

et, en développant et supprimant le facteur $(x^2 + y^2)$,
il vient

$$x^2 + y^2 - 4r(x + y) + 4r^2 = 0,$$

équation qui représente un cercle tangent aux axes, et
de rayon $2r$ ⁽¹⁾.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1476

(voir 3^e série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Trouver les solutions entières de l'équation

$$x^3 + x^2 + x + 1 = v^2.$$

(LIONNET.)

Cette question, proposée autrefois par M. Brocard, a
été résolue complètement par M. Gerono dans le nu-
méro de mai 1877 des *Nouvelles Annales*. L'équation
ci-dessus n'admet en réalité que les solutions $x = 1$,
 $x = 7$. Ce théorème remarquable peut aussi se déduire
d'une proposition de Fermat, énoncée dans les recher-
ches de M. Ch. Henry sur les manuscrits de l'illustre
géomètre.

L'équation proposée peut, en effet, s'écrire

$$(x + 1)(x^2 + 1) = v^2,$$

et, après avoir remarqué que les facteurs $(x + 1)$ et

(¹) La circonférence que cette équation représente est, au point F, tangente à la circonférence circonscrite au triangle rectangle OPQ. Le milieu de la droite OF est le point de contact du cercle des neuf points du triangle OPQ, et du cercle inscrit à ce triangle. (G.)

$(x^2 + 1)$ ont 2 pour diviseur commun, on est conduit au système d'équations $(x + 1) = 2m^2$, $x^2 + 1 = 2n^2$.

Or la proposition de Fermat, dont nous parlons, revient à dire que le système de ces deux équations n'admet de solutions en nombres entiers que pour $x = 7$ (en écartant les solutions évidentes $x = \pm 1$).

M. Genocchi a donné une démonstration très simple de ce théorème dans le numéro de juillet 1883 des *Nouvelles Annales*.

Question 1495

(voir 3^e série, t. III, p. 309);

PAR M. N. GOFFART.

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3(n - 1), \\ 4x + 9y &= 5(n - 2), \\ 9x + 16y &= 7(n - 3), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

est égal à n.

(ERNEST CESARO.)

La forme générale des équations ci-dessus est

$$a^2x + (a + 1)^2y = [(a + 1)^2 - a^2](n - a);$$

on en tire

$$\frac{a^2}{(a + 1)^2} = \frac{n - a - y}{n - a + x}.$$

Or, a et $a + 1$ étant premiers entre eux, $n - a + x$ et $n - a - y$ sont respectivement des équimultiples de $(a + 1)^2$ et de a^2 ; donc on a, pour les systèmes de solutions générales des équations ci-dessus,

$$\begin{aligned} n - a - y &= ma^2, \\ n - a + x &= m(a + 1)^2; \end{aligned}$$

d'où

$$x = m(a+1)^2 - (n-a),$$

$$y = (n-a) - ma^2.$$

Si l'on écarte les solutions négatives, il faut poser

$$ma^2 \leq n-a \leq m(a+1)^2$$

ou

$$\frac{n-a}{a^2} \geq m \geq \frac{n-a}{(a+1)^2}.$$

En attribuant à a toutes les valeurs de 1 à n , on voit que m peut recevoir toutes les valeurs entières comprises dans la suite

$$\frac{n-1}{1} \dots \frac{n-1}{2^2}, \quad \frac{n-2}{2^2} \dots \frac{n-2}{3^2}, \\ \frac{n-3}{3^2} \dots \frac{n-3}{4^2}, \dots \frac{n-n}{n^2} \dots \frac{n-n}{(n+1)^2}.$$

Soit

$$m = n-1, n-2 \dots 2, 1, 0,$$

en tout n valeurs.

C. Q. F. D.

Application. $n = 10$.

$$a = 1, \quad \frac{10-1}{1} \geq m \geq \frac{10-1}{4}; \quad \text{d'où} \quad m = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3$$

et

$$\begin{cases} x = 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, \\ y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

$$a = 2, \quad \frac{10-2}{4} \geq m \geq \frac{10-2}{9}, \quad \text{d'où} \quad m = 2, 1$$

et

$$\begin{cases} x = 10, 1, \\ y = 0, 4; \end{cases}$$

$a = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ne donnent pas de solutions, m devant être entier. $a = 10$ donne

$$m = 0,$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Renoy.

Question 1496

(voir 3^e série, t. III, p 399);

PAR M. N. GOFFART.

Une ellipse et une hyperbole sont telles que les asymptotes de l'hyperbole sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; prouver que, en faisant un choix convenable d'axes de coordonnées, on pourra donner respectivement aux équations des deux courbes les formes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m.$$

(WOLSTENHOLME.)

Les deux courbes rapportées aux axes OX, OY qui sont des diamètres conjugués de l'ellipse et des asymptotes de l'hyperbole ont pour équations

$$(1) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad xy = h^2.$$

Une droite $y = \rho x$ coupe l'ellipse en des points pour lesquels les tangentes auront une même direction si l'on pose

$$\rho = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Soient les nouveaux axes OX', OY' ayant pour équations

$$\alpha y - \beta x = 0, \quad \alpha y + \beta x = 0.$$

Faisons angle $XOX' = \varphi$, $XOY' = \varphi'$, $XOY = \theta$; les formules de transformation seront

$$(2) \quad \begin{cases} y \sin \theta = x' \sin \varphi + y' \sin \varphi', \\ x \sin \theta = x' \sin(\theta - \varphi) - y' \sin(\varphi' - \theta). \end{cases}$$

Si l'on remarque qu'en outre

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{\sin \varphi'}{\sin(\varphi' - \theta)},$$

les équations (1) se réduiront à

$$x'^2 \frac{2 \sin^2 \varphi}{\beta^2 \sin^2 \theta} + y'^2 \frac{2 \sin^2 \varphi'}{\beta^2 \sin^2 \theta} = 1,$$

$$x'^2 \frac{\alpha \sin^2 \varphi}{\beta h^2 \sin^2 \theta} - y'^2 \frac{\alpha \sin^2 \varphi'}{\beta h^2 \sin^2 \theta} = 1.$$

Et si l'on pose

$$\frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{2 \sin^2 \varphi} = a^2, \quad \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{2 \sin^2 \varphi'} = b^2 \quad \text{et} \quad \frac{2 h^2}{\alpha \beta} = m,$$

il viendra enfin

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = m.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1497

(voir 3^e série, t. III, p. 399);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant données deux droites fixes, on considère deux cercles de même rayon, tangents entre eux et touchant chacun une des droites. Le point commun à l'un de ces cercles et à la droite correspondante étant fixe, on demande le lieu du point de contact des deux cercles lorsqu'on fait varier leur rayon. (D'OCAGNE.)

Je prends le point de contact fixe pour origine, la tangente en ce point pour axe des y , et sa perpendiculaire pour axe des x . Soit b la distance de l'origine au sommet de l'angle que je suppose placé du côté des y

négatifs. L'équation du second côté sera

$$(1) \quad y = mx - b.$$

r étant le rayon des courbes ; x, y les coordonnées de leur point de contact ; celles du centre du second cercle seront $2x - r$ et $2y$. Écrivons que le carré de la distance de ce point au centre du premier cercle est égal à $4r^2$, et que sa distance à la droite (1) est égale à r :

$$4(x - r)^2 + 4y^2 = 4r^2, \quad \text{ou} \quad (x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

$$(3) \quad 2y - 2mx + mr + b = \pm r\sqrt{1 + m^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} r &= \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{2y - 2mx + b}{\pm \sqrt{1 + m^2} - m} \\ &= (m \pm \sqrt{1 + m^2})(2y - 2mx + b), \end{aligned}$$

et, en éliminant r ,

$$\begin{aligned} [1 + 4m(m \pm \sqrt{1 + m^2})]x^2 \\ - 4(m \pm \sqrt{1 + m^2})xy + y^2 - 2b(m \pm \sqrt{1 + m^2})x = 0. \end{aligned}$$

Le lieu se compose de deux hyperboles.

Note. — La même question a été résolue par M. Goffart.