

E. CESÀRO

**Sur une communication de M. Tchébychew
au congrès de Clermont-Ferrand**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 513-516

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_513_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE COMMUNICATION DE M. TCHÉBYCHEW AU CONGRÈS
DE CLERMONT-FERRAND ⁽¹⁾;**

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant posé, pour abréger,

$$w_x = u_{k(x-1)+1} + u_{k(x-1)+2} + u_{k(x-1)+3} + \dots + u_{k(x-1)+k-1},$$

⁽¹⁾ 21 août 1876.

considérons la série

$$U_{kn} = w_1 - (k-1)u_k + w_2 - (k-1)u_{2k} + \dots + w_n - (k-1)u_{nk},$$

supposée convergente. On peut écrire

$$U_{kn} = (u_1 + u_2 + \dots + u_{kn}) - k(u_k + u_{2k} + \dots + u_{nk});$$

par conséquent, si l'on fait

$$v_x = ku_{kx} - u_x,$$

puis

$$V_x = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_x,$$

on a

$$U_{kn} + V_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{kn}.$$

Si n augmente indéfiniment,

$$U + V = \lim [u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{kn}].$$

II. $[z]$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans z , soit

$$u_x = \frac{[ax]}{x^2}$$

et, par suite,

$$v_x = \frac{[kax] - k[ax]}{kx^2}.$$

A cause de

$$kax - 1 < [kax] \leqslant kax, \quad kax - k < k[ax] \leqslant kax,$$

on a

$$-1 < [kax] - k[ax] < k.$$

La quantité $[kax] - k[ax]$ a donc une des valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $k-1$. Il en résulte qu'elle est égale au reste de la division de $[kax]$ par k . Par conséquent, $\rho(p, q)$ désignant le reste de la division de $[p]$ par q , on a

$$v_x = \frac{\rho(kax, k)}{kx^2}.$$

Cela posé, on peut écrire

$$u_x = \frac{a}{x} - \frac{\theta}{x^2},$$

θ étant une fraction proprement dite. Il en résulte

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{kn} \\ = a(H_{kn} - H_n) - \theta \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(kn)^2} \right],$$

θ étant, comme θ , une fraction proprement dite, et H_x représentant la somme des x premiers termes de la série harmonique. Pour n infini :

$$\lim [u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{kn}] = alk.$$

De tout cela résulte que, si l'on pose

$$U = \frac{[a]}{1} + \frac{[2a]}{4} + \dots + (k-1) \frac{[ka]}{k^2} + \frac{[(k+1)a]}{(k+1)^2} + \frac{[(k+2)a]}{(k+2)^2} + \dots, \\ V = \frac{1}{k} \left[\frac{\rho(ka, k)}{1} + \frac{\rho(2ka, k)}{4} + \frac{\rho(3ka, k)}{9} + \dots \right],$$

on a

$$U + V = alk.$$

III. Soit, par exemple, $k = 2$. La fonction $\rho(z, 2)$ égale 0 ou 1, suivant que $[z]$ est pair ou impair. On peut donc écrire

$$\rho(z, 2) = \frac{1 - (-1)^{[z]}}{2}$$

Conséquemment, si l'on pose

$$U = \frac{[a]}{1} + \frac{[2a]}{4} + \frac{[3a]}{9} + \frac{[4a]}{16} + \dots, \\ W = \frac{(-1)^{[2a]}}{1} + \frac{(-1)^{[4a]}}{4} + \frac{(-1)^{[6a]}}{9} + \dots,$$

on a

$$U - \frac{1}{4} W = al2 - \frac{\pi^2}{24}.$$

C'est (¹) la relation que M. Tchébychew a déduite d'une identité de M. Catalan (²). Elle montre, par exemple, que l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \pm \frac{[ix]}{i^2} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^{[2ix]}}{i^2}$$

admet la racine unique

$$x = \frac{\pi^2}{24\ell_2} = 0,59308\dots$$
