

E. CESÀRO

Quelques propriétés élémentaires des groupes plusieurs fois transitifs

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 471-475

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_471_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_471_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES GROUPES PLUSIEURS FOIS TRANSITIFS;

PAR M. E. CESARO.

1. Soit G un groupe de substitutions, k fois transitif, de degré n . Soient

$$(1) \quad s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$$

toutes les substitutions de G , pour lesquelles k éléments donnés $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}$ restent fixes. En vertu de sa transitivité, G contient certainement une substitution σ_α , qui fait succéder, aux k éléments donnés, k éléments quelconques $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \dots, x_{\alpha_k}$, choisis parmi les n éléments que l'on considère. Toutes les substitutions

$$(2) \quad s_1 \sigma_\alpha, s_2 \sigma_\alpha, s_3 \sigma_\alpha, \dots, s_m \sigma_\alpha$$

ont évidemment le même effet. De plus, si τ est une quelconque des substitutions qui font succéder les éléments x_α aux éléments x_i , il est clair que $\tau \sigma_\alpha^{-1}$ ne déplace pas les éléments x_i , et appartient, par conséquent, à la série (1). Or, de $\tau \sigma_\alpha^{-1} = s_\lambda$ on tire $\tau = s_\lambda \sigma_\alpha$. Donc, la ligne (2) contient *toutes* les substitutions qui changent les éléments x_i en éléments x_α . Observons, maintenant, que $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k$ est un arrangement de k indices, choisis parmi les nombres $1, 2, 3, \dots, n$. Il y a $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ de tels arrangements. Pour chacun d'eux, nous pouvons toujours trouver une substitution σ , et former, comme précédemment, une ligne analogue à (2). On construit ainsi un tableau de $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ lignes, dont chacune contient m substitutions. Ce tableau renferme, sans

omission, ni répétition, les substitutions de G . *Sans omission*, parce que, étant donnée une substitution de G , il suffit d'observer quels éléments elle fait succéder aux k éléments x_i , et de prendre, dans le tableau, la ligne correspondant à l'arrangement des indices de ces éléments. D'après ce qui a été dit, cette ligne contient nécessairement la substitution considérée. *Sans répétition*, parce que deux substitutions $s_\lambda \sigma$ et $s_\mu \sigma$, d'une même ligne, ne peuvent coïncider, sans que l'on ait $s_\lambda = s_\mu$; et deux substitutions, appartenant à deux lignes différentes, ne peuvent qu'être différentes, puisque, aux mêmes éléments x_i , elles font succéder des éléments différents, ou différemment disposés. Par conséquent, l'ordre r du groupe G est

$$m.n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Si l'on observe, en outre, que les substitutions (1) forment un groupe G_1 , sous-groupe de G , qui a la propriété de ne pas déplacer les éléments x_i , on peut énoncer la proposition suivante ⁽¹⁾ :

THÉORÈME. — *L'ordre d'un groupe G , transitif k fois, de degré n , est divisible par*

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Le quotient est l'ordre des sous-groupes de G , qui ne contiennent pas k éléments donnés.

2. En examinant la série des substitutions $\sigma_\alpha^{-1} s_\lambda \sigma_\alpha$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots, m$), on voit immédiatement que le sous-groupe G_α , qui ne contient pas les k éléments x_α , est le transformé de G_1 , moyennant σ_α . Il est donc semblable à G_1 . Conséquemment, si v_q est le nombre des substitutions de G_1 , qui déplacent précisément q éléments

(1) NEUBAUER, *Substitutionentheorie*, p. 74. *Lehrsatz I*

ments, ce nombre a la même valeur pour les autres sous-groupes. En outre, il est clair que, identiquement,

$$(3) \quad m = v_{n-k} + v_{n-k-1} + v_{n-k-2} + \dots + v_0,$$

où $v_0 = 1$. De même, si N_q est le nombre des substitutions de G , qui déplacent précisément q éléments, on a

$$(4) \quad r = N_n + N_{n-1} + N_{n-2} + \dots + N_0,$$

avec $N_0 = 1$. Cela posé, examinons l'ensemble des substitutions de tous les sous-groupes $G_1, G_2, \dots, G_\alpha, \dots$, dont le nombre est égal à celui des manières de choisir k éléments parmi les n donnés, c'est-à-dire à $C_{n,k}$. Parmi ces substitutions sont contenues sans omission, mais avec des répétitions possibles, les substitutions de G , qui ne déplacent pas plus de $n - k$ éléments. Si $q \geq k$, chaque sous-groupe contient v_{n-q} substitutions, qui déplacent précisément $n - q$ éléments, et le nombre total de ces substitutions, dans le groupe G , serait $C_{n,k} v_{n-q}$, si chacune d'elles n'était pas comptée en autant de sous-groupes qu'il y a de manières de choisir, parmi les q éléments qui doivent rester fixes, les k éléments, dont l'absence caractérise un sous-groupe. Donc

$$N_{n-q} = \frac{C_{n,k}}{C_{q,k}} v_{n-q} \\ = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \frac{v_{n-q}}{q(q-1)(q-2) \dots (q-k+1)} (q \geq k)$$

Substituant dans (4), et observant que

$$r = m \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1),$$

on trouve

$$N_n + N_{n-1} + \dots + N_{n-k+1} \\ = n(n-1) \dots (n-k+1) \\ \times \left\{ m - \left[\frac{v_{n-1}}{k(k-1) \dots 1} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{v_{n-2}}{(k-1)(k-2) \dots 1} + \dots + \frac{v_0}{n(n-1) \dots (n-k+1)} \right] \right\}.$$

Enfin, en tenant compte de (3), et en posant

$$\varepsilon_{n-q} = 1 - \frac{1}{q(q-1)\dots(q-k+1)},$$

on obtient

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} N_n + N_{n-1} + \dots + N_{n-k+1} \\ = n(n-1)\dots(n-k+1)(\varepsilon_{n-k}\nu_{n-k} + \varepsilon_{n-k-1}\nu_{n-k-1} + \dots + \varepsilon_0\nu_0). \end{array} \right.$$

3. Des nombres ν on sait seulement qu'ils ne peuvent être négatifs, à l'exception de ν_0 , qui est toujours 1. Par suite,

$$\begin{aligned} N_n + N_{n-1} + \dots + N_{n-k+1} &\geq n(n-1)\dots(n-k+1)\varepsilon_0\nu_0 \\ &= n(n-1)\dots(n-k+1) - 1. \end{aligned}$$

En d'autres termes :

THÉORÈME. — *Un groupe du n^{ième} degré, k fois transitif, a au moins $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) - 1$ substitutions, qui déplacent plus de $n - k$ éléments.*

Pour $k=1$, on a un théorème connu ⁽¹⁾. Pour $k=2$, on voit qu'un groupe doublement transitif, de degré n , a au moins $n^2 - n - 1$ substitutions, qui laissent un seul élément fixe, lorsqu'elles ne déplacent pas tous les éléments. Pour $k=n-2$, il doit y avoir au moins $3.4.5\dots n-1$ substitutions, qui déplacent plus de deux éléments. En y joignant la substitution unité, on trouve au moins $\frac{1}{2}n!$ substitutions. Si l'on exclut le groupe symétrique, qui est n fois transitif, on voit que le groupe considéré est précisément le groupe alterné. Celui-ci, en effet, n'a pas de substitutions déplaçant seulement deux éléments. Il n'y a donc que le groupe alterné, qui puisse être $n-2$ fois transitif, et l'on sait que *réellement* il en est ainsi ⁽²⁾.

(1) NEUB, *Substitutionentheorie*, p. 71, *Lehrsatz III*; dû à M. Jordan.

(2) NEUB, *Substitutionentheorie*, p. 73.

4. THÉOREME. — *Tout groupe de degré n , transitif k fois, n'a pas de sous-groupe de même degré, et de même transitivité, qui ait en commun avec lui les substitutions déplaçant plus de $n - k$ éléments.*

Soient G le groupe, et G' un sous-groupe, qui possède les propriétés indiquées. Appliquons aux deux groupes la relation (5). Il vient, par soustraction,

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_{n-k}(\nu_{n-k} - \nu'_{n-k}) \\ + \varepsilon_{n-k-1}(\nu_{n-k-1} - \nu'_{n-k-1}) + \dots + \varepsilon_0(\nu_0 - \nu'_0) = 0. \end{cases}$$

Si $k \geq 2$, les quantités ε sont essentiellement positives. D'autre part, puisque G' est contenu dans G , les quantités placées entre parenthèses ne peuvent être négatives. Il est donc nécessaire qu'elles soient nulles, pour que la relation (6) ait lieu. En joignant ce résultat aux hypothèses faites, on voit que $N_q = N'_q$, pour toute valeur de q . Donc $G' = G$. Observons que, pour $k = 1$, le théorème énoncé ne subsiste plus; car, dans ce cas, $\varepsilon_{n-1} = 0$, et les deux groupes peuvent différer par les substitutions qui déplacent précisément $n - 1$ éléments (*).