

P. TARDY

Remarques sur une note de M. Ibach

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 257-261

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__257_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. IBACH;

PAR M. P. TARDY, à Gênes.

Dans le dernier Cahier, page 172, M. Ibach donne une méthode pour intégrer les équations linéaires simultanées du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = r_1,$$

$$\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = r_2,$$

dans le cas où, entre les fonctions P_1, Q_1, P_2, Q_2 de la variable x , existe une relation

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2) dx}.$$

On arrive au même résultat par une voie beaucoup plus simple. Si nous différencions la première équation et si nous éliminons ensuite $\frac{dz}{dx}$ et z , nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(P_1 - \frac{Q_1'}{Q_1} + Q_2 \right) \frac{dy}{dx} \\ + \left(P_1' + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 - P_1 \frac{Q_1'}{Q_1} \right) y = V, \end{cases}$$

où

$$V = r_1' + \left(Q_2 - \frac{Q_1'}{Q_1} \right) r_1 - Q_1 r_2.$$

Or on intégrera cette équation si on peut la réduire à la forme

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} + X_1 y \right) + X \left(\frac{dy}{dx} + X_1 y \right) = V.$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (X + X_1) \frac{dy}{dx} + (XX_1 + X'_1)y = V.$$

L'intégrale générale sera

$$y = e^{-\int X_1 dx} \left[A + \int e^{\int (X_1 - X) dx} \left(B + \int V e^{\int X dx} dx \right) dx \right].$$

La question est donc réduite à déterminer les fonctions X et X_1 par les équations

$$X + X_1 = P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Q_2,$$

$$XX_1 + X'_1 = P'_1 + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 - P_1 \frac{Q'_1}{Q_1}.$$

Posons

$$X = Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Z,$$

$$X_1 = P_1 - Z;$$

la première est satisfaite et la seconde donne, pour trouver Z ,

$$Z' + \left(Q_2 - P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} \right) Z + Z^2 = P_2 Q_1,$$

laquelle sera vérifiée si l'on a, en même temps,

$$Z^2 = P_2 Q_1 \quad \text{et} \quad \frac{Z'}{Z} = P_1 - Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1}.$$

En éliminant Z , on obtient

$$P_1 - Q_2 = \frac{1}{2} \frac{P'_2}{P_2} - \frac{1}{2} \frac{Q'_1}{Q_1},$$

qui est exactement la relation donnée par M. Hach. En prenant donc

$$X = Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1} + \sqrt{P_2 Q_1} = P_1 - \frac{1}{2} \frac{P'_2}{P_2} - \frac{1}{2} \frac{Q'_1}{Q_1} + \sqrt{P_2 Q_1},$$

$$X_1 = P_1 - \sqrt{P_2 Q_1},$$

et en substituant dans la formule générale, on aura y et ensuite z sans nouvelle intégration.

Permettez-moi d'ajouter que presque toutes les équations différentielles linéaires du deuxième ordre qu'on a intégrées par des méthodes spéciales sont des cas particuliers de l'équation (2). Je choisirai quelques exemples.

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{P'}{P} + \frac{R'}{R} \right) \frac{dy}{dx} - \left[\left(\frac{P'}{P} \right)' - \frac{P'}{P} \frac{R'}{R} - a^2 \frac{R^2}{P^2} \right] y = 0,$$

intégrée par Euler (*Calc. intégr.*, t. II, p. 116) d'après la connaissance d'un facteur intégrant, rentre dans l'équation (2), si l'on fait

$$X = -\frac{R'}{R} - a \frac{R}{P},$$

$$X_1 = -\frac{P'}{P} - a \frac{R}{P}.$$

Une équation considérée par Petzval et dont M. Spitzer a tiré des résultats particuliers (*Archives de Grunert*, t. LX)

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\varphi_2 + \varphi_1 + \frac{\varphi_2' - \varphi_1'}{\varphi_2 - \varphi_1} \right) \frac{dy}{dx} \\ - \left(\varphi_1 \varphi_2 + \frac{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'}{\varphi_2 - \varphi_1} \right) y = 0 \end{aligned}$$

se déduit aussi de l'équation (2) en posant

$$X = -\varphi_2 - \frac{\varphi_2' - \varphi_1'}{\varphi_2 - \varphi_1},$$

$$X_1 = -\varphi_1.$$

On obtient l'équation de M. Burnside (*Miller mathematical Questions*, t. XI)

$$2f(x) \frac{d^2y}{dx^2} + 3f'(x) \frac{dy}{dx} + [f''(x) \pm n^2] y = 0,$$

en prenant

$$X = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

et en mettant $\theta = n\sqrt{-1}$ ou $\theta = n$, selon que l'on a dans l'équation le signe supérieur ou inférieur.

M. Cockle (*Miller mathematical Questions*, t. IX) a intégré l'équation

$$\frac{d^2\gamma}{dr^2} - \left(\frac{R'}{2R} + a\sqrt{R} \right) \frac{d\gamma}{dx} + R\gamma = 0 :$$

ici il faut poser

$$X = \frac{R'}{2R} - (a - c)\sqrt{R},$$

$$X_1 = c\sqrt{R},$$

et déterminer c par l'équation

$$c(a + c) + 1 = 0.$$

Aussi l'équation proposée et intégrée par M. Malet (*Mathematical Questions*, t. XXIII),

$$\frac{d^2\gamma}{dr^2} + P \frac{d\gamma}{dx} + \left[\frac{P^2 - R^2}{4} + \frac{1}{2}(P' - R') \right] \gamma = 0.$$

rentre dans l'équation (2), en mettant

$$X = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}R,$$

$$X_1 = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}R.$$

Si l'on veut y faire rentrer l'équation considérée par M. Malmsten (*Dublin and Cambridge mathem. Journ.*, t. III, *Journal de Crelle*, t. 39, et BRIOSCI, *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. II),

$$\frac{d^2\gamma}{dr^2} + \frac{r}{x} \frac{d\gamma}{dx} - \left(bx^m + \frac{s}{x^2} \right) \gamma = 0.$$

(261)

on mettra

$$X = \frac{1}{2} \frac{r}{x} - z,$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \frac{r}{x} + z,$$

et l'on aura, pour déterminer z , l'équation

$$4x^2 \frac{dz}{dx} - 4x^2 z^2 = -4bx^{m+2} - (r^2 - 2r + 4s).$$

Si l'on fait

$$z = \frac{v+k}{x},$$

où k est donné par l'équation

$$(2k+1)^2 = (r-1)^2 + 4s,$$

on réduit la précédente à

$$x \frac{dv}{dx} - (2k+1)v - v^2 = -bx^{m+2}.$$

Maintenant on sait (BOOLE, *Differential equations*, p. 95) que l'équation

$$x \frac{dy}{dx} - ay + cy^2 = ex^n$$

est intégrable par des quadratures indéfinies toutes les fois que $\frac{n \pm 2a}{2n}$ est un nombre entier positif q ; donc, dans notre cas, on aura la condition

$$\frac{m+2 \pm (2k+1)}{2(m+2)} = q.$$

c'est-à-dire

$$m+2 = \pm \frac{2(2k+1)}{2q-1},$$

et, en substituant pour $2k+1$ sa valeur,

$$m+2 = \pm \frac{2\sqrt{(r-1)^2 + 4s}}{2q-1},$$

qui est la condition posée par M. Malmsten.