

ERNEST CESÁRO

Propriétés d'une courbe de poursuite

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 85-89

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__85_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS D'UNE COURBE DE POURSUITE;

 PAR M. ERNEST CÉSARO.

I. Deux mobiles M, μ partent en même temps d'un point O. M parcourt une trajectoire quelconque, μ se meut de manière à occuper, à chaque instant, le centre de gravité du chemin parcouru par M. Soient x, y et α, β les coordonnées respectives de M, μ . Soit r la distance M μ et s, σ les chemins respectivement parcourus par M, μ .

1° On a

$$s\alpha = \int x ds,$$

$$s\beta = \int y ds,$$

et, en différentiant,

$$s dx = (x - \alpha) ds,$$

$$s d\beta = (y - \beta) ds.$$

Ces égalités, divisées membre à membre, donnent

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{y - \beta}{x - \alpha}.$$

Donc *le second mobile est constamment dirigé vers le premier*. Les mêmes égalités, élevées au carré, ajoutées membre à membre, donnent

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{s}.$$

Donc *le rapport des vitesses des deux mobiles est égal au rapport de leur distance au chemin parcouru par le mobile poursuivi*.

2° Différentiant l'égalité

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

on trouve

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{x - \alpha}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - \beta}{r} \frac{dy}{ds} \right) - \left(\frac{x - \alpha}{r} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{y - \beta}{r} \frac{d\beta}{ds} \right).$$

Or, si l'on désigne par θ l'angle des tangentes aux deux trajectoires, en deux points correspondants, la première parenthèse est évidemment égale à $\cos \theta$, et la seconde à $\frac{d\sigma}{ds}$.
Donc

$$\cos \theta = \frac{d(\sigma + r)}{ds},$$

ou bien

$$\cos \theta = 2k + s \frac{dk}{ds},$$

si l'on désigne par k le rapport des vitesses $\frac{d\sigma}{ds}$ ou $\frac{r}{s}$.

II. Y a-t-il des trajectoires pour lesquelles k reste constant? On doit avoir $\cos \theta = 2k$, c'est-à-dire que θ doit être constant. Généralement, cet angle est nul en O : donc il doit rester constamment nul, et l'on doit avoir $k = \frac{1}{2}$. *Les trajectoires se confondent en une ligne droite.* Mais θ peut ne pas être nul en O, et cela arrive lorsque la tangente en O n'est pas déterminée, comme dans une spirale logarithmique de pôle O. Alors les trajectoires jouissent des propriétés suivantes :

1° $\cos \theta = 2k$. θ est constant.

2° $r = \sigma = ks$. *La distance des deux mobiles est égale au chemin parcouru par le mobile poursuivant, et proportionnelle au chemin parcouru par le mobile poursuivi.*

III. Examinons le cas d'une spirale logarithmique, dont l'équation est $u = ae^{m\omega}$,

1° Les arcs étant comptés à partir du pôle, les formules ordinaires donnent, pour les coordonnées du

centre de gravité, les valeurs suivantes

$$\alpha = \frac{mu}{1 + 4m^2} (\sin \omega + 2m \cos \omega),$$

$$\beta = \frac{mu}{1 + 4m^2} (2m \sin \omega - \cos \omega).$$

Puis

$$x - \alpha = \frac{u}{1 + 4m^2} [(1 + 2m^2) \cos \omega - m \sin \omega],$$

$$y - \beta = \frac{u}{1 + 4m^2} [m \cos \omega + (1 + 2m^2) \sin \omega],$$

$$r = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + 4m^2}} u.$$

D'autre part, on sait que

$$s = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} u.$$

Par suite,

$$k = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{s} = \frac{m}{\sqrt{1 + 4m^2}}.$$

Donc le rapport des vitesses est constant.

2° On a

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{mu}{\sqrt{1 + 4m^2}} = ku.$$

Donc le rapport des rayons vecteurs est constant.

3° On a

$$\cos \theta = 2k = \frac{2m}{\sqrt{1 + 4m^2}},$$

d'où

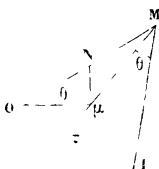
$$\text{tang } \theta = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \text{ tang } V,$$

si l'on désigne par V l'angle constant que fait la tangente en M avec OM . Il est donc facile de construire θ , connaissant V . D'autre part,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2m \sin \omega - \cos \omega}{\sin \omega + 2m \cos \omega} \text{ tang } (\omega - \theta).$$

Donc l'angle des rayons vecteurs OM , $O\mu$ est constant et égal à θ . Remarquons aussi que le triangle $OM\mu$ reste toujours semblable à lui-même.

4° De ce qui précède, il résulte une construction fort simple du centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique, compté à partir du pôle. Soit MT la tangente

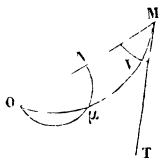


en M . On mène $O\mu$, $M\mu$ faisant respectivement avec OM , MT le même angle θ . Le point μ est le centre de gravité cherché. Si l'on élève μN perpendiculaire à $O\mu$, on a

$$ON = \frac{O\mu}{\cos\theta} = \frac{k \cdot OM}{\cos\theta} = \frac{1}{2} OM.$$

Donc N est le milieu de OM . De là une autre construction. Enfin, une troisième construction consiste à décrire sur OM , ON les circonférences respectivement capables des angles $\pi - V$, $\frac{\pi}{2}$. Ces circonférences se coupent en μ , au centre de gravité cherché.

5° L'angle $O\mu\tau$ est évidemment égal à $\theta + (V - \theta) = V$.



Donc le lieu du point μ est une spirale égale à la première et de même pôle.

6° On démontre aisément que le centre de cour-

bure C , de la spirale (M) au point M , est le point diamétralement opposé à M , dans la circonférence $OM\mu$, et que le centre de courbure de la spirale (μ) , au point μ , se trouve au milieu de $C\mu$.