

EUGÈNE ROUCHÉ

Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 5-16

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_5_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_5_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

NOTE SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ⁽¹⁾.

Il n'est guère de problème qui ait donné lieu à plus de tentatives que celui de la quadrature du cercle : on entend par là, comme on sait, la construction avec la règle et le compas, c'est-à-dire à l'aide d'un nombre limité de droites et de cercles, du carré équivalent à un cercle donné quelconque. L'insuccès de tant d'efforts avait fait regarder ce problème comme impossible, bien qu'il n'existât, à vrai dire, aucune démonstration rigoureuse de cette impossibilité; on avait seulement prouvé jusqu'ici que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable (LAMBERT, 1761), et qu'il en est de même de son carré (LEGENDRE, *Note IV* de sa *Géométrie*; HERMITE, *Journal de Crelle*, 1873).

Dans tout problème susceptible d'être résolu avec la règle et le compas, chaque point de la figure s'obtient par l'intersection de deux droites ou d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles; si l'on imagine qu'on traduise algébriquement les constructions au fur et à mesure, à l'aide des formules de la Géométrie analytique, on aperçoit qu'on n'aura jamais à résoudre que des équations

⁽¹⁾ Tirée de la cinquième édition du *Traité de Géométrie* de MM. Eug. Rouché et Ch. de Comberousse, qui vient de paraître à la librairie Gauthier-Villars.

linéaires ou quadratiques, en sorte que l'équation finale pourra, par un nombre suffisant d'élévations au carré successives, être ramenée à une équation de degré pair à coefficients rationnels. On aura donc démontré l'impossibilité de la quadrature du cercle, si l'on prouve que le nombre π ne saurait être racine d'une équation de degré quelconque à coefficients rationnels.

M. Lindemann a annoncé (*Comptes rendus*, t. XCV, et *Mathematische Annalen*, t. XX; 1882) qu'il était parvenu à déduire cette proposition de certaines formules de M. Hermite (*Mémoire sur la fonction exponentielle*, 1874); sa méthode n'est qu'une généralisation, mais fort habile, de celle qu'avait employée l'illustre géomètre pour démontrer que le nombre e , base des logarithmes népériens, jouit de la propriété similaire.

Nous allons exposer, en simplifiant quelques détails, les formules de M. Hermite et les recherches de M. Lindemann; ce dernier travail, si remarquable, appelle d'autant plus l'attention qu'il ne semble pas devoir être le dernier mot sur ce sujet, au moins sous le rapport de la simplicité.

Formules de M. Hermite.

1. Remarquons d'abord que, si l'on désigne par m un nombre entier et positif quelconque, par $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines d'une équation entière de la forme

$$(a) \quad f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

on peut toujours déterminer un polynôme entier et de degré n en z

$$(1) \quad \Phi(z, z_i) = z^n + \theta_1(z_i) z^{n-1} + \dots + \theta_n(z_i),$$

tel qu'on ait identiquement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{zf(z)}{z - z_i} &= \Phi(z, z_i) - \frac{d\Phi(z, z_i)}{dz} \\ &- m \left[\frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \dots + \frac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_n, z_i)}{z - z_n} \right], \end{aligned} \right.$$

(7)

i désignant l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \dots, n$, à condition de remplacer z_0 par zéro.

Car, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres, on trouve, puisque le premier terme est z^n de part et d'autre, n relations qui permettent de déterminer les n coefficients

$$\theta_1(z_i), \dots, \theta_n(z_i);$$

ces relations, qu'on déduit de

$$\begin{aligned} z_i^k + az_i^{k-1} + \dots + a_k \\ = \theta_k(z_i) - (n + k - 1)\theta_{k-1}(z_i) \\ - m[S_0\theta_{k-1}(z_i) + S_1\theta_{k-2}(z_i) + \dots + S_{k-2}\theta_1(z_i) + S_{k-1}], \end{aligned}$$

en faisant successivement k égal à $1, 2, \dots, n$ et où $S_0, S_1, \dots$ désignent les sommes des puissances semblables des racines de $f(z) = 0$, montrent que $\theta_k(z_i)$ est un polynôme de la forme

$$\theta_k(z_i) = z_i^k + b_1 z_i^{k-1} + \dots + b_k,$$

$b_1, \dots, b_k$ étant des fonctions entières symétriques et à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$.

L'expression (1) fait voir en outre que, si l'on pose

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix},$$

on a

$$\delta \times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \theta_1(z_0) & \dots & \theta_1(z_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_n(z_0) & \dots & \theta_n(z_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \dots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \dots & \Phi(z_n, z_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi(z_0, z_n) & \dots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix};$$

et comme, en vertu de l'expression de $\theta_k(z_i)$, le second déterminant se réduit par des transformations bien connues à δ , on voit que le dernier déterminant est égal à δ^2 .

Enfin, si l'on désigne par $\varphi(z, z_i)$ ce que devient $\Phi(z, z_i)$ lorsqu'on y remplace m par zéro, on a

$$(2') \quad \frac{zf(z)}{z - z_i} = \varphi(z, z_i) - \frac{d\varphi(z, z_i)}{dz},$$

et

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \varphi(z_0, z_0) & \dots & \varphi(z_n, z_0) \\ \varphi(z_0, z_1) & \dots & \varphi(z_n, z_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(z_0, z_n) & \dots & \varphi(z_n, z_n) \end{vmatrix} = 0.$$

2. Cela posé, considérons l'intégrale

$$\frac{1}{1.2 \dots (m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i} dz,$$

le chemin d'intégration pouvant être choisi à volonté, à condition toutefois de ne pas passer par l'infini; nous désignerons cette intégrale par le symbole m_k^i .

En multipliant les deux membres de la relation (2) par $e^{-z} z^m f^m(z)$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-z} z^{m+1} f^{m+1}(z)}{z - z_i} \\ &= \frac{d}{dz} [e^{-z} z^m f^m(z) \Phi(z, z_i)] \\ &+ m e^{-z} z^m f^m(z) \left[\frac{\Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \dots + \frac{\Phi(z_n, z_i)}{z - z_i} \right]; \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par dz et intégrant entre les limites 0 et z_k ,

$$(m+1)_k^i = \Phi(z_0, z_i) m_k^0 + \dots + \Phi(z_n, z_i) m_k^n.$$

La recherche des intégrales $(m+1)_k^i$ se trouve ainsi ramenée à celle des intégrales m_k^i . Par le même procédé, on ramènera à leur tour celles-ci aux intégrales $(m-1)_k^i$ et, en continuant de la sorte, on arrivera à la formule

$$m_k^i = U_0^i(1)_k^0 + \dots - U_n^i(1)_k^n.$$

avec la relation

$$(4) \quad \begin{vmatrix} U_0^0 & \dots & U_n^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ U_0^n & \dots & U_n^n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)}.$$

Mais, en multipliant par e^{-z} les deux membres de la relation (2'), on a

$$\frac{e^{-z} z f(z)}{z - z_i} = \frac{d}{dz} [e^{-z} \varphi(z, z_i)],$$

d'où, en multipliant par dz et intégrant entre 0 et z_k ,

$$(1)_k^i = \varphi(z_0, z_i) - e^{z_k} \varphi(z_k, z_i).$$

Il suffit dès lors de poser

$$(5) \quad u_h^i = U_h^i \varphi(z_h, z_0) + \dots + U_h^n \varphi(z_h, z_n)$$

pour obtenir la formule

$$(6) \quad m_k^i = u_0^i - e^{-z_k} u_k^i,$$

due à M. Hermite et dont dépend toute la suite de cette étude.

Les quantités u_h^i sont des fonctions entières et à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$; leur expression (5) montre en outre que leur déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_0^0 & \dots & u_n^0 \\ u_0^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0^n & \dots & u_n^n \end{vmatrix}$$

est égal au produit des déterminants (3) et (4); d'où résulte l'égalité

$$\Delta = \delta^{2m}.$$

3. Enfin, pour terminer ce travail préparatoire, nous allons montrer que l'intégrale m_k^i tend vers zéro lorsque m croît indéfiniment.

Si l'on désigne, en effet, par λ' la longueur du chemin d'intégration adopté pour le calcul de m_k^i , et par μ' et ν' les modules maxima de $zf(z)$ et de $e^{-z}(z - z_i)^{-1}$ le long de ce chemin, on a évidemment

$$\text{mod } m_k^i < \frac{\mu' m \cdot \nu' \cdot \lambda'}{1 \cdot 2 \dots (m-1)}.$$

Par suite, si λ, μ, ν sont les plus grandes valeurs de λ', μ', ν' pour toutes les valeurs de k et de i , toutes les intégrales m_k^i auront un module inférieur à

$$\left[\frac{\mu^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} \right] \mu \nu \lambda,$$

or λ, μ, ν sont des nombres finis et indépendants de m , et l'on sait d'ailleurs que la fraction mise entre parenthèses peut, pour une valeur assez grande de l'entier m , devenir inférieure à toute quantité donnée.

Théorèmes de M. Lindemann.

4. Supposons : 1° que n soit de la forme pq , p et q étant deux entiers positifs quelconques; 2° que $z_1, \dots, z_p$ soient les racines d'une équation irréductible de la forme

$$(\beta) \quad \psi(z) = z^p + b_1 z^{p-1} + \dots + b_p = 0,$$

$b_1, b_2, \dots, b_p$ étant des nombres entiers réels ou imaginaires; 3° que l'on ait pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, p$ de l'indice ν

$$(7) \quad z_{p+\nu} = 2z_\nu, \quad z_{2p+\nu} = 3z_\nu, \quad \dots, \quad z_{(q-1)p+\nu} = qz_\nu.$$

On aura, par la formule (6),

$$\begin{aligned} e^{z_\nu} m_\nu^i &= e^{z_\nu} u_0^i - u_\nu^i, \\ e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i &= e^{z_{p+\nu}} u_0^i - u_{p+\nu}^i, \\ &\dots\dots\dots, \\ e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i &= e^{z_{(q-1)p+\nu}} u_0^i - u_{(q-1)p+\nu}^i, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant respectivement par des nombres $N_1, N_2, \dots, N_q$, supposés entiers réels ou imaginaires, mais différents de zéro, puis ajoutant et ayant égard aux relations (7),

$$\begin{aligned} & N_1 \Sigma e^{z_\nu} m'_\nu + N_2 \Sigma e^{z_{p+\nu}} m'_{p+\nu} + \dots + N_q \Sigma e^{z_{(q-1)p+\nu}} m'_{(q-1)p+\nu} \\ &= u'_0 [N_1 \Sigma e^{z_\nu} + N_2 \Sigma e^{2z_\nu} + \dots + N_q \Sigma e^{qz_\nu}] \\ &\quad - N_1 \Sigma u'_\nu - N_2 \Sigma u'_{p+\nu} - \dots - N_q \Sigma u'_{(q-1)p+\nu}, \end{aligned}$$

toutes les sommes Σ étant prises de $\nu = 1$ à $\nu = p$.

L'existence d'une relation telle que

$$(1) \quad N_0 + N_1 \Sigma e^{z_\nu} + N_2 \Sigma e^{2z_\nu} + \dots + N_q \Sigma e^{qz_\nu} = 0$$

entraînerait donc les $n + 1$ relations que l'on déduit de

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & N_1 \Sigma e^{z_\nu} m'_i + N_2 \Sigma e^{z_{p+\nu}} m'_{p+i} + \dots + N_q \Sigma e^{z_{(q-1)p+\nu}} m'_{(q-1)p+i} \\ &= -[N_0 u'_0 + N_1 \Sigma u'_i + N_2 \Sigma u'_{p+i} + \dots + N_q \Sigma u'_{(q-1)p+i}], \end{aligned} \right.$$

en y faisant $i = 0, 1, 2, \dots, n$. L'impossibilité de la relation (1) sera donc démontrée, si l'on prouve l'impossibilité du système des $(n + 1)$ équations (8).

A cet effet, nous ferons d'abord les remarques suivantes, qui résultent de la composition des u'_k et de la forme entière des coefficients de l'équation qui a les z_k pour racines.

1° Le second membre de la première des équations (8) (relative à $i = 0$) est un nombre entier; car ce second membre, qui est une fonction entière et à coefficients entiers des z_k , est en outre une fonction symétrique de ces racines; vu que, si l'on échange les indices x et y qu'on suppose choisis parmi $1, 2, \dots, p$, u_x^0 s'échange avec u_y^0 , $z_{x+\lambda p}$ avec $z_{y+\lambda p}$, et $u_{x+\lambda p}^0$ avec $u_{y+\lambda p}^0$;

2° Les seconds membres des autres équations (8) ne font que s'échanger entre eux par l'effet de l'échange mutuel des z_k ; car, si l'on échange z_x et z_y , $u_{l+\lambda p}^x$ s'échange avec $u_{l+\lambda p}^y$ tant que l diffère de x et de y , et en outre

$u_{y+\lambda p}^x$ s'échange avec $u_{x+\lambda p}^y$ et $u_{x+\lambda p}^x$ avec $u_{y+\lambda p}^y$. Ces seconds membres sont d'ailleurs des fonctions entières et à coefficients entiers des z_i ; si donc on considère l'équation

$$\omega^{n+1} + A_1 \omega^n + \dots + A_n = 0,$$

qui aurait les seconds membres des équations (8) pour racines, les coefficients $A_1, \dots, A_n$ étant des fonctions entières et symétriques de ces seconds membres seront des nombres entiers.

Mais les premiers membres des équations (8) tendent vers zéro quand m croît indéfiniment; donc il en est de même alors de $A_1, A_2, \dots, A_n$, et, comme ce sont des nombres entiers, il faut qu'à partir de certaines valeurs de m et pour toutes les valeurs plus grandes de m on ait rigoureusement $A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_n = 0$. Donc pour ces mêmes valeurs de m les seconds membres des équations (8) devraient s'évanouir, et, par suite, tous les déterminants d'ordre $(q+1)$ déduits du tableau des coefficients des $N_0, N_1, \dots, N_q$ dans les seconds membres des équations (18) devraient être nuls; il en serait donc de même du déterminant Δ et par conséquent aussi de δ , puisque $\Delta = \delta^{2m}$.

Mais le déterminant δ est, comme on sait, égal au produit de toutes les différences $\pm (\alpha z_i - \beta z_h)$, lorsqu'on donne à i et h toutes les valeurs $1, 2, \dots, p$, et à α et β toutes les valeurs $0, 1, 2, \dots, q$ (à condition cependant de ne pas faire à la fois α et β nuls); δ ne pourrait donc être nul que s'il y avait entre deux racines z_i et z_h une relation de la forme $\alpha z_i - \beta z_h = 0$; mais alors l'équation $\psi(z) = 0$ et l'équation

$$z^p + \frac{\beta}{\alpha} b_1 z^{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 b_2 z^{n-2} + \dots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p b_p = 0$$

auraient une racine commune, tandis que $\psi(z)$ a été supposé irréductible.

On a donc le théorème suivant :

Si $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont les racines d'une équation irréductible de la forme (β) à coefficients entiers $b_1, \dots, b_n$ réels ou imaginaires, il ne peut exister, entre les fonctions symétriques,

[illegible]

où q désigne un nombre entier et positif quelconque, aucune relation telle que (I), c'est-à-dire aucune relation linéaire dont les coefficients $N_0, N_1, \dots, N_q$ soient entiers réels ou imaginaires et différents de zéro.

En particulier, on ne saurait avoir

$$N_0 + N_1 + (e^{r'z_1} + e^{r'z_2} + \dots + e^{r'z_n}) = 0,$$

r étant un entier positif quelconque; et par conséquent,
sous les conditions admises, aucune des fonctions symé-
triques

$$e^{rz_1} + e^{rz_2} + \dots + e^{rz_n}$$

ne saurait être égale à un nombre rationnel.

5. Les propositions précédentes peuvent s'étendre aux fonctions symétriques

$$(10) \quad \begin{cases} \Sigma e^{\tilde{z}_1}, & \Sigma e^{\tilde{z}_1+\tilde{z}_2}, & \Sigma e^{\tilde{z}_1+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3}, & \dots, & \Sigma e^{\tilde{z}_1+\tilde{z}_2+\dots+\tilde{z}_p} \\ \Sigma e^{r\tilde{z}_1}, & \Sigma e^{r(\tilde{z}_1+\tilde{z}_2)}, & \Sigma e^{r(\tilde{z}_1+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3)}, & \dots, & \Sigma e^{r(\tilde{z}_1+\tilde{z}_2+\dots+\tilde{z}_p)}. \end{cases}$$

En effet, supposons d'abord que les nombres qui figurent comme exposants de e soient tous différents les uns des autres et différents de zéro. L'existence d'une relation linéaire à coefficients entiers $N_0, N_1, N_2, \dots$ entre les quantités (10) conduirait alors à un système d'équations entièrement analogue au système (8) et dont

on mettrait l'impossibilité en évidence par un raisonnement pareil à celui du n° 3.

Si l'hypothèse ci-dessus n'est pas remplie, admettons d'abord que dans l'une des fonctions (10), que nous désignons par Σe^Z , plusieurs des exposants Z soient égaux entre eux, et considérons une relation de la forme

$$(II) \quad 0 = N_0 + N_1 \Sigma e^Z.$$

Toutes les quantités Z peuvent alors être réparties en plusieurs groupes

$$Z_1, Z'_1, Z''_1, \dots; Z_2, Z'_2, Z''_2, \dots; \dots,$$

tels que les quantités qui forment un même groupe soient racines d'une équation irréductible à coefficients rationnels et ne fassent que s'échanger entre elles quand on échange les racines z_k . Or le succès du raisonnement appliqué dans le n° 3 à la relation (I) était dû précisément à ce qu'il n'intervenait dans chaque somme séparée que des exposants de e s'échangeant entre eux par suite de l'échange des z_k . Nous pouvons donc ici conclure immédiatement à l'impossibilité d'une équation de la forme

$$0 = N_0 + N_1 \Sigma e^{Z_1} + N_2 \Sigma e^{Z_2} + \dots$$

et, par suite, de la relation (II) qui en est un cas particulier. Si, de plus, une des quantités Z était nulle, cela équivaldrait à un changement dans la valeur de N_0 ; mais alors le raisonnement serait en défaut, à moins que tous les exposants du second membre de (II) ne s'évanouissent en même temps. Si l'équation qui a les z_k pour racines est irréductible, le cas d'exception que nous signalons ne peut se présenter que pour l'exposant de la fonction

$$(11) \quad e^Z = e^{p(z_1 + z_2 + \dots + z_p)},$$

lorsque le coefficient b_1 de z^{p-1} dans l'équation $\psi(z) = 0$

est nul. Considérons maintenant, au lieu de (II), une équation linéaire dans laquelle figurent plusieurs des fonctions (10); on pourra encore grouper les exposants de telle sorte que chacun des nombres N multiplie une somme telle que les exposants de e qui appartiennent aux termes de cette somme soient les racines d'une équation irréductible, et l'on répétera ce qui a été dit ci-dessus à propos de l'équation (II).

Donc : *Aucune des fonctions symétriques (10) ne peut être égale à un nombre rationnel; et plus généralement, entre les fonctions (10), il ne peut exister aucune relation linéaire à coefficients rationnels; à moins que l'équation $\psi(z) = 0$ ne soit privée de second terme, auquel cas une fonction symétrique des quantités (11) peut être égale à un nombre rationnel.*

6. La première série des quantités (10) n'est autre que la suite des coefficients $M_1, M_2, \dots, M_p$ de l'équation

$$(12) \quad V^p - M_1 V^{p-1} + M_2 V^{p-2} - \dots \pm M_p = 0,$$

qui a pour racines $e^{z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_p}$.

D'après ce qui vient d'être dit, ces coefficients ne peuvent être rationnels, sauf M_p pour $b_1 = 0$, et il ne saurait exister entre eux aucune relation linéaire à coefficients rationnels. Mais si l'une des racines de (12), c'est-à-dire l'une des quantités $e^{z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_p}$ était rationnelle, sa substitution à la place de V dans (12) établirait précisément une relation à coefficients rationnels entre $M_1, M_2, \dots, M_p$. Donc : *Si z est une équation irréductible de la forme (3), e^z ne peut être un nombre rationnel.*

Or on a $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$; donc $\pi\sqrt{-1}$ ne saurait être racine d'une équation irréductible de la forme (3). D'ailleurs, on peut ramener toute équation à coefficients

rationnels à la forme (3), en prenant pour inconnue pz , au lieu de z , p étant un nombre entier convenablement choisi. Donc enfin :

Le nombre π ne saurait être racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels (réels ou imaginaires).