

MORET-BLANC

Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1882

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 464-469

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_464_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1882

(voir 3^e série, t. I, p. 413);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

1. *Étant donné un cercle de rayon r et un point A dans son plan, à une distance d du centre, on suppose menée par le point A une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné m^2 .*

Démontrer que, si α désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point A , on aura la formule

$$(1) \qquad \cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}.$$

DISCUSSION. — *Limites de m quand on fait varier α , le point A étant supposé à l'intérieur du cercle.*

Soient B et C les points d'intersection de la sécante avec la circonférence de centre O .

La relation entre les trois côtés et un angle d'un triangle, appliquée aux triangles AOB, AOC, donne

$$r^2 = \overline{AB}^2 + d^2 - 2AB \cdot d \cos \alpha,$$

$$r^2 = \overline{AC}^2 + d^2 - 2AC \cdot d \cos \alpha;$$

d'où, en ajoutant,

$$2r^2 = m^2 + 2d^2 - 2(AB + AC)d \cos \alpha.$$

Abaissant OI perpendiculaire sur la corde BC, on a

$$AI = \frac{AB + AC}{2} = d \cos \alpha,$$

d'où

$$AB + AC = 2d \cos \alpha$$

Substituant cette valeur dans la relation précédente, il vient

$$2r^2 = m^2 + 2d^2 - 4d^2 \cos^2 \alpha,$$

d'où

$$2 \cos^2 \alpha = \frac{m^2 + 2d^2 - 2r^2}{2d^2},$$

$$(1) \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2} \quad (1).$$

CALCUL LOGARITHMIQUE.

2. La formule (1) étant admise, calculer l'angle α à $0''$, 1 près, en supposant 1° la distance d égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et m égal au double de la moyenne proportionnelle entre r et d .

(1) Les limites de m sont évidemment $\sqrt{2r^2 + 2d^2}$, $\sqrt{2r^2 - 2d^2}$.

$$2^0 \quad d = \frac{2}{3}r, \text{ et } m = d\sqrt{3}.$$

$$1^0 \quad d = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1), \quad 2d^2 = r^2(3-\sqrt{5}),$$

$$m^2 = 4dr = 2r^2(\sqrt{5}-1),$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2(\sqrt{5}-2)}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5})}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\sin 18^\circ.$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log \sin 18^\circ = \overline{1},4899824$$

$$\log \cos 2\alpha = \overline{1},7910124$$

$$\frac{345}{221} \quad 51^\circ 49' 30''$$

$$8'',2$$

$$2\alpha = 51^\circ 49' 38'',2$$

$$\alpha = 25^\circ 54' 49'',1.$$

$$2^0 \quad d^2 = \frac{4}{9}r^2, \quad m^2 = 3d^2 = \frac{4}{3}r^2,$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}r^2 : \frac{4}{9}r^2 = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

$$\log \cos (180^\circ - 2\alpha) = \overline{1},8750613$$

$$\frac{699}{86} \quad 41^\circ 24' 30''$$

$$4'',6$$

$$180^\circ - 2\alpha = 41^\circ 24' 34'',6$$

$$90^\circ - \alpha = 20^\circ 42' 17'',3$$

$$\alpha = 69^\circ 17' 42'',7.$$

3. On connaît, dans un triangle ABC, deux côtés b , c , et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté a . Calculer ce côté et l'angle A.

(On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et l'on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.)

s désignant la surface du triangle, on a, par des formules connues,

$$s^2 = \frac{3a^4}{16} = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16},$$

d'où

$$4a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0,$$

$$a^2 = \frac{(b^2 + c^2) \pm \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2}}{4}$$

ou

$$a^2 = \frac{b^2 + c^2 \pm \sqrt{(3b^2 - c^2)(3c^2 - b^2)}}{4}.$$

Pour que le triangle soit possible, il faut d'abord qu'on ait

$$\frac{c^2}{3} < b^2 < 3c^2$$

ou

$$10b^2c^2 - 3b^4 - 3c^4 > 0.$$

Quand cette condition est remplie, le problème admet deux solutions, si b est différent de c .

En effet, la plus grande des deux valeurs de a^2 est évidemment inférieure à $(b + c)^2$, et la plus petite est supérieure à $(b - c)^2$; car on a

$$b^2 + c^2 - \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2} > 4(b^2 + c^2) - 8bc,$$

$$\sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2} < 8bc - 3(b^2 + c^2) \quad (1),$$

ou, en élevant au carré, et passant tous les termes dans un même membre,

$$8(b^2 + c^2)^2 + 4(b^2 - c^2)^2 - 48bc(b^2 + c^2) + 64b^2c^2 > 0,$$

$$12(b - c)^4 > 0,$$

relation évidente si b est différent de c .

Lorsque $b = c$, on a $a^2 = b^2$, $a = b = c$; il n'y a plus qu'un triangle, qui est équilatéral.

Calculons maintenant l'angle A.

(1) Le second membre, $8bc - 3(b^2 + c^2) = 2bc - 3(b - c)^2$, est une quantité positive si $c > \frac{b}{3}$, $b > c$.

(468)

On a

$$s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = bc \sin A,$$

d'où

$$a^2 = \frac{2bc \sin A}{\sqrt{3}}$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Égalant ces deux valeurs de a^2 , il vient, en divisant par $4bc$,

$$\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \frac{(b^2 + c^2) \sqrt{3}}{4bc},$$

ou, en remarquant que $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$,

$$\sin(A + 60^\circ) = \frac{(b^2 + c^2) \sqrt{3}}{4bc}.$$

Pour que le triangle soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{3(b^2 + c^2)^2}{16b^2c^2} < 1$$

ou

$$3b^4 + 3c^4 - 16b^2c^2 < 0,$$

condition identique à celle qui a été trouvée plus haut.

Si elle est remplie, en appelant θ le plus petit angle

ayant pour sinus $\frac{(b^2 + c^2) \sqrt{3}}{4bc}$, on aura

$$\sin \theta = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \sin 60^\circ > \sin 60^\circ, \quad \text{si } b < c,$$

d'où

$$\theta > 60^\circ,$$

$$A = \theta - 60^\circ,$$

$$A = 180^\circ - \theta - 60^\circ;$$

il y a deux triangles satisfaisant à la question. Si $b = c$,

on a

$$\theta = 60^\circ,$$

(469)

et simplement

$$A = 60^{\circ};$$

il n'y a qu'un triangle, qui est équilatéral.

Ce sont les résultats obtenus dans la première discussion.