

HENRI CARTIER

École polytechnique (concours de 1881)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 420-422

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__420_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (CONCOURS DE 1881)

(voir 3^e série, t. I, p. 129);

SOLUTION DE M. HENRI CARTIER,

Élève du lycée d'Angoulême.

On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée de P sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point M d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.

Je prends pour axe des x l'asymptote donnée AX, et pour axe des y la perpendiculaire PA menée de P à l'asymptote.

Soient a l'ordonnée mobile AF, du foyer F situé sur l'axe des y , et p l'ordonnée AP du point P.

L'équation générale des hyperboles considérées est

$$x^2 - (y - a)^2 = (x + ny)^2,$$

et, comme elles passent par le point P, on a

$$(1) \quad (p - a) = \pm np.$$

La seconde asymptote a pour équation

$$(2) \quad (1 - n^2)y - 2nx - 2a = 0.$$

L'équation de la directrice correspondant au foyer F est

$$(3) \quad x + ny = 0.$$

En éliminant n et a entre les équations (1), (2), (3), on aura l'équation du lieu géométrique proposé.

Les équations (3) et (1) donnent

$$n = -\frac{x}{y}, \quad a = p \left(1 \pm \frac{x}{y} \right).$$

En remplaçant n et a par ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$x^2 + y^2 - 2p(y \pm x) = 0.$$

Donc, le lieu cherché se compose de deux cercles de rayon $p\sqrt{2}$, passant par l'origine A des coordonnées, et dont les centres ont pour ordonnée p et pour abscisses $+p$ et $-p$.

Note. — La même question a été résolue par M. Hertz, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet.

Solution géométrique de la même question.

Un point F pris arbitrairement sur le prolongement de la perpendiculaire AP à l'asymptote AX donnée peut être considéré comme un foyer de l'une des hyperboles dont il s'agit dans l'énoncé de la question proposée. Et si AM représente la directrice correspondant à ce foyer, et PB une parallèle à l'asymptote AX, menée de P et rencontrant au point B la directrice AM, on aura

$$PB = PF,$$

d'après une proposition connue ⁽¹⁾. Par suite l'angle BFP du triangle rectangle isocèle BPF sera de 45°.

⁽¹⁾ La distance d'un point quelconque P d'une hyperbole à l'un des foyers, F, de cette courbe, est égale à la parallèle à l'une des deux

Cela posé, soit FG la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la directrice AM, le quadrilatère FGBP étant inscriptible, les angles BFP, AGP sont égaux : donc

$$AGP = 45^\circ.$$

En outre, si l'on désigne par M le point d'intersection de la seconde asymptote de l'hyperbole et de la directrice AM, et par R le point d'intersection de AF et d'une parallèle à GP menée de M, on aura évidemment

$$AM = 2 AG, \quad AR = 2 AP,$$

et l'angle

$$AMR = AGP = 45^\circ.$$

Donc le point M appartient à l'arc du segment capable de 45° , décrit sur la droite déterminée AR.

Mais il faut observer qu'il y a deux hyperboles passant par le point P, et dont F est un foyer, et AX une asymptote. Ces deux hyperboles sont symétriques, l'une de l'autre, par rapport à la droite AF; d'où résulte finalement que le lieu du point M se compose des arcs de deux segments capables d'un angle de 45° , décrits sur la droite AR des deux côtés de cette droite.

(G.)