

MAURICE D'OCAGNE

Sur l'enveloppe de certaines droites variables

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 252-259

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__252_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

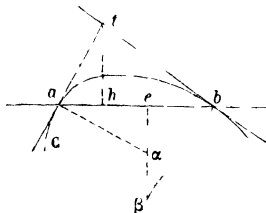
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient, dans un plan, C une courbe fixe quelconque, ab une droite mobile coupant cette courbe aux



points a et b ; les tangentes à la courbe C aux points a

et b se coupent au point t ; la droite ab touche son enveloppe au point e ; la droite $ex\beta$ normale à cette enveloppe coupe en α et β les normales ax et $b\beta$ à la courbe C.

L'objet de la présente Note est la détermination du point e , lorsque la droite mobile est assujettie à certaines conditions remarquables.

LE SEGMENT DE DROITE ab EST DE LONGUEUR CONSTANTE.

2. On sait que, dans ce cas, rappelé ici à simple titre de mémoire, *le point e s'obtient en abaissant du point de rencontre de ax et $b\beta$ une perpendiculaire sur ab* . C'est une des propriétés fondamentales du centre instantané de rotation.

3. Si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de ab est une *épicycloïde à quatre points de rebroussement* ⁽¹⁾.

L'ARC ab EST DE LONGUEUR CONSTANTE.

4. Représentant par $d(a)$ et $d(b)$ les arcs infiniment petits correspondants décrits par les points a et b sur la courbe C, nous avons, en vertu d'un théorème connu,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at \cdot ae}{bt \cdot be},$$

et comme, dans ce cas, $d(a) = d(b)$,

$$\frac{ae}{be} = \frac{bt}{at},$$

d'où l'on conclut, pour la détermination du point e :

(1) M. Mannheim a publié, dans les *Nouvelles Annales*, une étude géométrique de cette courbe (2^e série, t. XVII, p. 321).

THÉOREME. — Si t' est la symétrique du point t par rapport au milieu du segment ab , le point e se trouve sur la bissectrice de l'angle $at'b$.

5. J'ai démontré ailleurs ⁽¹⁾, par la simple Géométrie, que si, dans ce cas, la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de la droite ab est une *parabole* tangente à ces deux droites et ayant pour axe leur bissectrice.

LA SOMME DE L'ARC ab ET DU SEGMENT ab EST CONSTANTE.

6. On a, dans ce cas,

$$d(ab) + d(\text{arc } ab) = 0,$$

ou

$$d(ab) + d(b) - d(a) = 0.$$

Or

$$d(a) = d(b) \frac{ae.at}{be.bt},$$

et, en appelant $d\omega$ l'angle de deux positions infiniment voisines de ab ,

$$d(ab) = \alpha\beta.d\omega,$$

ou, puisque, d'après un théorème connu, $d\omega = \frac{d(\alpha)}{\alpha}$,

$$\begin{aligned} d(ab) &= \alpha\beta \cdot \frac{d(\alpha)}{\alpha} = \alpha\beta.d(b) \frac{ae.at}{be.bt} \frac{\sin tab}{ae} \\ &= d(b) \frac{\alpha\beta.at}{be.bt} \sin tab. \end{aligned}$$

L'équation différentielle écrite plus haut devient donc

$$d(b) \frac{\alpha\beta.at}{be.bt} \sin tab + d(b) - d(b) \frac{ae.at}{be.bt} = 0,$$

ou

$$\alpha\beta.at \sin tab + be.bt - ae.at = 0,$$

⁽¹⁾ Journ. de Math. élém.. t. IV, p. 160.

ou encore

$$\alpha\beta.th + be.bt - ae.at = 0.$$

Si l'on remarque que

$$\alpha\beta = be.\cot tba - ae.\cot tab,$$

l'équation précédente devient

$$be(th.\cot tba + bt) - ae(th.\cot tab + at) = 0,$$

ou

$$\frac{be}{ae} = \frac{ah + at}{bh + bt}.$$

Cette expression permettrait de construire le point e , mais nous allons la transformer. En effet, elle peut s'écrire

$$\frac{be}{ae} = \frac{at(1 + \cos tab)}{bt(1 + \cos tba)} = \frac{at.\cos^2 \frac{tab}{2}}{bt.\cos^2 \frac{tba}{2}};$$

d'ailleurs

$$\frac{at}{bt} = \frac{\sin tba}{\sin tab} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2}};$$

donc

$$\frac{be}{ae} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2} \cos^2 \frac{tab}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2} \cos^2 \frac{tba}{2}} = \frac{\tan \frac{tba}{2}}{\tan \frac{tab}{2}},$$

expression qui se traduit immédiatement par l'énoncé suivant :

THÉOREME. — *Le point e est le point de contact sur ab du cercle exinscrit au triangle atb , situé dans l'angle atb .*

7. Il résulte de là que, si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de ab est un cercle tangent à ces deux droites.

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{be.bt}.$$
$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ax}{b\beta}.$$
$$\frac{at.ae}{bt.be} = \frac{ax}{b\beta}$$
$$\frac{ae}{be} = \frac{ax}{at} \frac{bt}{bz}.$$

Abaissions du point de rencontre t des tangentes les perpendiculaires th et ti sur ao et bo ; les triangles $ao\alpha$ et tha sont semblables, ainsi que $bo\beta$ et tib ; donc

$$\frac{a\alpha}{at} = \frac{ao}{th}, \quad \frac{bt}{b\beta} = \frac{ti}{bo},$$

et, par suite,

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao \cdot ti}{th \cdot bo}.$$

Tirons bm parallèle à oe ; nous avons

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao}{mo};$$

donc

$$\frac{ao}{mo} = \frac{ao \cdot ti}{th \cdot bo},$$

ou

$$\frac{bo}{mo} = \frac{ti}{th},$$

égalité qui fait voir, en remarquant que les angles $\widehat{hti}$ et $\widehat{bom}$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, que les triangles thi et omb sont semblables; et comme les côtés homologues th et mo , d'une part, ti et bo , de l'autre, sont perpendiculaires, il en résulte que hi est perpendiculaire à mb et, par suite, à oe .

On aura donc le point e cherché, en projetant le point de rencontre t des tangentes en h et en i sur les côtés oa et ob de l'angle constant et en abaissant du point o une perpendiculaire sur la droite hi .

Mais cette construction peut être simplifiée. En effet, tirons la droite ot ; le quadrilatère $ohit$ est inscriptible, puisque ses angles en h et en i sont droits; par suite, $\widehat{hot} = \widehat{hit}$; mais $\widehat{hit} = \widehat{ioc}$, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc $\widehat{hot} = \widehat{hit}$.

On aura donc encore le point e , en faisant l'angle $\widehat{boe}$ égal à l'angle $\widehat{toa}$.

9. APPLICATION. — Dans une ellipse, une corde ab est constamment vue du centre o sous un angle droit; quelle est l'enveloppe de cette corde?

La droite ot coupe ab en son milieu; elle est donc médiane du triangle aob , et, comme ce triangle est rectangle en o , $\widehat{toa} = \widehat{bao}$; si e est le point où ab touche son enveloppe, on a, d'après ce qui précède, $\widehat{aoe} = \widehat{toa}$; donc $\widehat{aoe} = \widehat{bao}$; et, comme ob est perpendiculaire à oa , oe sera perpendiculaire à ab ; la normale oe à l'enveloppe de ab passant par le point fixe o , cette enveloppe est un cercle ayant ce point pour centre.

LES TANGENTES A L'EXTRÉMITÉ DE L'ARC ab FONT
ENTRE ELLES UN ANGLE CONSTANT.

10. On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{bc.bt}.$$

D'ailleurs, si R et R' sont les rayons de courbure en a et b , $d\theta$ et $d\theta'$ les angles de contingence en ces points, on a

$$d(a) = R d\theta, \quad d(b) = R' d\theta'.$$

Mais, puisque $\widehat{atb}$ est constant, $d\theta = d\theta'$: donc

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{R}{R'};$$

par suite,

$$\frac{ae.at}{bc.bt} = \frac{R}{R'}.$$

Appelons α et β les centres de courbure en a et b , o un point tel que les rayons $a\alpha$ et $b\beta$ soient vus de ce point sous des angles droits; nous retomberons alors sur la même figure que pour la question précédente, avec les mêmes relations, et nous arriverons, par conséquent, au même résultat.

Donc, le point o étant défini ainsi qu'il vient d'être dit, on aura le point e où ab touche son enveloppe *en faisant* $\widehat{aoe} = \widehat{tob}$.

Dans le cas particulier des coniques, ce problème donne lieu à un théorème plus intéressant, qui rentre dans le cadre d'un travail plus étendu que nous publierons prochainement dans les *Nouvelles Annales*.