

C. CHÂTEAU

Solution géométrique des questions 1395 et 1387

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 133-136

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__133_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES QUESTIONS 1595 ET 1587

(voir 3^e série, t. I, p. 143 et 141),

PAR M. C. CHATEAU,

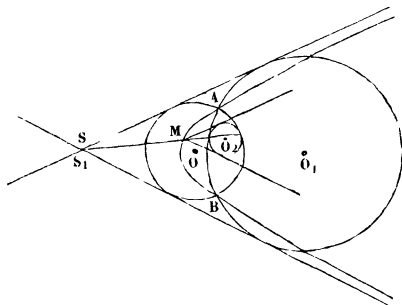
Élève du Lycée Condorcet.

Par un point quelconque M d'une hyperbole, on mène des droites parallèles aux asymptotes ; par un autre point A pris arbitrairement sur l'hyperbole, on mène deux cercles, tangents aux asymptotes et ayant leurs centres sur l'axe transverse de la courbe : démontrer que ces deux droites et ces deux cercles sont tangents à un même cercle.

Considérons le cercle O comme la directrice d'un cône

dont le sommet se projette en S , le contour apparent du cône se composant des asymptotes de l'hyperbole.

Supposons que nous fassions glisser ce cône parallèlement à lui-même, de manière que son sommet décrive la verticale du point S perpendiculaire au plan de la figure :



le cercle d'intersection avec le plan de base se déplacera en restant tangent au contour apparent primitif, et il arrivera un moment où le cône transporté aura pour directrice la circonférence O_1 dans le plan de base; soit S_1 , coïncidant avec S , la projection du sommet transporté. Je dis que l'hyperbole est précisément la projection de l'intersection de ces deux cônes.

En effet, ces deux cônes, étant homothétiques, ont une section plane commune à l'infini : ils se coupent donc suivant une seconde courbe plane, et, comme les génératrices de contour apparent sont parallèles, cette courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces génératrices de contour apparent, et de plus situées dans les plans tangents suivant ces génératrices. D'ailleurs cette hyperbole passe par les deux points A et B , puisque ces points sont à la fois situés sur les deux bases. Donc l'hyperbole d'intersection a bien pour projection l'hyperbole donnée.

Cela posé, considérons un point quelconque M de l'intersection et joignons-le aux deux sommets ; puis supposons que nous fassions glisser le cône S parallèlement à lui-même, de façon qu'il ait toujours la génératrice SM commune avec le cône primitif : il lui sera tangent. Amenons le sommet S en M : alors le cône ainsi transporté aura sa section par le plan de la figure tangente à la base O du premier cône. Supposons maintenant que nous fassions subir la même opération au cône S_1 : une fois le sommet S_1 amené en M , le cône ainsi transporté sera également coupé par le plan de la figure suivant un cercle tangent à O_1 . Mais, le cône S_1 n'étant que le cône S transporté parallèlement à lui-même, les deux cônes S et S_1 , transportés de manière à avoir leur sommet en M , coïncident. Leur base O_2 est donc à la fois tangente aux deux cercles O et O_1 ; et, de plus, comme elle est tracée sur le cône qui a son sommet en M , elle est tangente au contour apparent de ce cône, c'est-à-dire aux parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par M .

Les deux génératrices de contact SM , S_1M ayant même projection, il en résulte que la droite SM passe par les points de contact du cercle O_2 avec les deux premiers.

Il résulte de la démonstration précédente qu'en faisant varier le point M sur l'hyperbole, le cercle O_2 se déplace en restant tangent aux deux premiers, les tangentes à ce cercle issues de M restant parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. On a donc ce théorème :

Soient deux cercles fixes C et C' tangents aux droites D et D' ; on considère un cercle variable K qui touche C et C' et on lui mène des tangentes parallèles à D et à D' : le lieu de leur point de rencontre est une hyperbole passant par les points de rencontre à distance finie des cercles C et C' et ayant D et D' pour asymptotes.

Supposons que, au lieu de déplacer le cône S sur la verticale SS_1 d'un même côté du plan de la figure, nous le déplaçons de manière à l'amener en S_1 de l'autre côté du plan par rapport à S : alors ce sera la seconde nappe du cône qui sera coupée par le plan de base. Les raisonnements faits précédemment s'appliquent également à ce cas.

Si l'un des systèmes de tangentes communes aux deux cercles est imaginaire, les deux cônes ont alors un système de plans tangents communs imaginaires, puisque la trace du plan tangent commun aux deux cônes est précisément la tangente commune aux deux bases. Or on voit que, dans ce cas, l'intersection des deux cônes est une ellipse. La projection de cette ellipse est donc le lieu des points de rencontre des droites imaginaires tangentes au cercle variable et menées parallèlement aux deux tangentes communes imaginaires : ce lieu est réel.
