

WALECKI

Équation en S de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés [fin]

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 556-560

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__556_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**ÉQUATION EN S DE DEGRÉ m ET DÉCOMPOSITION
D'UNE FORME QUADRATIQUE EN CARRÉS**

[FIN (1)];

PAR M. WALECKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

1. Soit $f(x, y, \dots, z)$ une fonction homogène, réelle,
du second degré, des m variables $x, y, \dots, z$.

(1) Même Tome, p. 101.

l'identité

$$(\S) \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \dots, z) - S(x^2 + y^2 + \dots + z^2) \\ \quad = (A - S)x'^2 + (B - S)y'^2 + \dots + (C - S)z'^2, \end{array} \right.$$

où je regarde maintenant $x', y', \dots, z'$ comme des fonctions indépendantes de $x, y, \dots, z$, définies par la substitution inverse de (1).

Si aucun des coefficients $A - S, B - S, \dots, C - S$ n'est nul, le premier membre de (5) est décomposable en m carrés indépendants, son discriminant est différent de 0; si l'un de ces coefficients est nul, le discriminant est nul; d'ailleurs ce discriminant est le premier membre de l'équation en S pour $f(x, y, \dots, z)$.

Donc l'équation en S admet pour seules racines les coefficients de la forme canonique obtenue par une substitution orthogonale, si la réduction est possible.

De plus, les dérivées partielles du premier membre de (5), quand on remplace S par A , par exemple, admettent des solutions non nulles : celles qui annulent $y', \dots, z'$ et non x' . Si je prends x' égal à 1, les valeurs correspondantes des variables $x, y, \dots, z$ sont, en vertu de (1), $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$: donc on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_{\alpha_1} - A \alpha_1 = 0, \\ f'_{\beta_1} - A \beta_1 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ f'_{\gamma_1} - A \gamma_1 = 0. \end{array} \right.$$

Donc enfin, si la réduction est possible, le coefficient A du carré x'^2 dans la forme réduite est une racine de l'équation en S ; les coefficients de x' dans la substitution (1) sont un système de solutions non nulles des équations (6).

3. Il faut voir maintenant si les coefficients ainsi

définis déterminent effectivement une substitution orthogonale et réduisent la fonction.

Je suppose d'abord que toutes les racines de l'équation en S soient distinctes; à l'une S_1 correspond un système de solutions en $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$ que je détermine par la condition

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \gamma_1^2 = 1;$$

à une autre S_2 correspondra un second système $\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2$. Je dis que l'on a

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

En effet, si j'ajoute membre à membre les équations (6) après multiplication par $\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2$, et en y mettant S_1 à la place de A il reste

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_2 f'_{\gamma_1} = S_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2);$$

on aurait de même l'égalité qui s'en déduit par l'échange des indices 1 et 2.

Comme l'échange des indices ne change pas le premier membre et que S_1 est différent de S_2 , il faut que l'on ait

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_2 f'_{\gamma_1} = 0.$$

La première et les analogues montrent que la substitution est orthogonale.

La seconde et les analogues montrent que cette substitution annule les coefficients des rectangles et donne à la fonction la forme canonique.

Enfin, on vérifie, en ajoutant membre à membre les égalités (6) après multiplication par $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$ et en y remplaçant A par la racine S_1 de l'équation en S ,

$$\alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_1 f'_{\gamma_1} = S_1,$$

qui exprime que le coefficient du carré x'^2 est bien la racine S_1 qui a donné les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$.

4. Je suppose enfin que l'équation en S ait des racines multiples. Au lieu que la substitution orthogonale, propre à la réduction, soit déterminée d'une façon unique, elle pourra être choisie de plusieurs manières.

A chaque racine simple correspond une colonne de coefficients de la substitution (1), comme dans le cas précédent.

A une racine multiple en correspondront plusieurs : pour S racine multiple d'ordre p de l'équation en S , les équations (6), où l'on remplace A par S , se réduisent à $m - p$ distinctes. Je choisis arbitrairement un premier système de solutions vérifiant $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \gamma_1^2 = 1$.

Puis, j'en choisis un second en associant aux mêmes équations la condition

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

et ainsi de suite, de façon à obtenir des colonnes de coefficients, qui, par l'adjonction de ces conditions, satisfont entre elles et avec les autres à la condition d'orthogonalité.

Parmi les coefficients qui répondent à cette racine multiple d'ordre p , on en peut choisir arbitrairement un nombre donné par

$$(p - 1) + (p - 2) + \dots + 1 = \frac{p(p - 1)}{2}.$$

Quel que soit le choix fait, moyennant ces conditions, la forme réduite sera

$$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + \dots + S_m z'^2,$$

$S_1, S_2, \dots, S_m$ étant les racines de l'équation en S , et chacune d'elles étant répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité.
