

H. LEZ

Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 410-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__410_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE
EN 1881 ;**

PAR M. H. LEZ.

1. On donne un cône de révolution, dont la génératrice SA fait avec l'axe SO un angle β , et une ellipse dont les demi-axes sont a et b :

1° Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue en coupant le cône par un plan convenablement déterminé ;

2° Si AB est la trace du plan sécant sur le plan méridien ASB qui lui est perpendiculaire, démontrer la relation $SA \cdot SB = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$;

3° Calculer en fonction des données a , b , β , par des formules logarithmiques, l'angle SAB, la portion SA de la génératrice, ainsi que l'aire du triangle SAB.

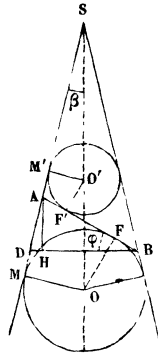
Dans un cône droit circulaire, la section faite par un plan oblique, qui rencontre toutes les génératrices, est une ellipse.

En effet, les sphères ayant mêmes centres et mêmes rayons que les cercles inscrit et exinscrit au triangle SAB touchent le plan sécant AB en deux points F, F' également distants du milieu de la droite AB ; de plus, la somme des distances d'un point quelconque P de la section aux deux points F, F' est constamment égale à $MM' = AB = 2a$.

1° Menant BD perpendiculaire à l'axe SO, on voit que l'angle $ADB = 90^\circ - \beta$ et que

$$AD = AM - DM = (a + c) - (a - c) = 2c.$$

Or, le triangle DAB sera possible, si $AB > AH$, ou $a > c \cos \beta$, condition remplie par une ellipse; on peut



donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.

2° Le triangle DAB fournit l'égalité

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2AD \cdot DB \sin \beta;$$

si l'on fait $DB = 2d$, on a

$$d^2 - 2cd \sin \beta = a^2 - c^2,$$

et

$$d = c \sin \beta \pm \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \beta}.$$

Par suite

$$DS = SB = \frac{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \beta} + c \sin \beta}{\sin \beta},$$

$$AS = DS - 2c = \frac{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \beta} - c \sin \beta}{\sin \beta},$$

d'où

$$SB \cdot SA = \frac{a^2 - c^2}{\sin^2 \beta} = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}.$$

3° Le triangle DAB donne aussi

$$\frac{2a}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{2c}{\sin \varphi} \quad \text{d'où} \quad \sin \varphi = \frac{c \cos \beta}{a}.$$

Connaissant les angles $ADB = 90^\circ - \beta$, $ABD = \varphi$, on obtient facilement les angles DAB , SAB .

Quant à la surface du triangle SAB , elle est égale à $\frac{SA \cdot SB \cdot \sin 2\beta}{2} = \frac{b^2}{\tan \beta}$.

Reste maintenant à rendre l'expression de AS calculable par logarithmes.

Pour cela, écrivant

$$\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \beta} = a \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \beta} = a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = a \cos \varphi,$$

on a

$$\begin{aligned} AS &= \frac{a \cos \varphi - c \sin \beta}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \beta} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi \sin \beta}{\cos \beta} \right) \\ &= \frac{a \cos(\varphi + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \beta}. \end{aligned}$$

On trouverait de même

$$SB = \frac{a \cos(\varphi - \beta)}{\sin \beta \cos \beta}.$$

2. Résoudre l'équation

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c,$$

les lettres a, b, c, m désignant des nombres donnés dont le dernier est supérieur ou au moins égal à l'unité.

Condition de réalité des racines. Limites de c . — En faisant disparaître les radicaux dans l'une des deux égalités

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c, \quad \sqrt{mx + a} - \sqrt{x + b} = c,$$

on obtient le même résultat

$$\begin{aligned} (m-1)^2 x^2 - 2(1+m)c^2 x - 2(b-a)(m-1)x \\ - c^2(a + 2b - c^2) - (a-b)^2. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation du second degré sont

$$x = \frac{c^2(1+m) + (b-a)(m-1) \pm 2c\sqrt{c^2m - (a-bm)(m-1)}}{(m-1)^2},$$

elles restent réelles si $c^2m \geq (a-bm)(m-1)$, condition assurément remplie quand $c^2 \geq (a-bm)$, et toujours si $bm \geq a$, m étant plus grand que 1. Lorsque $m = 1$, le premier et le troisième terme de l'équation réduite disparaissent, et l'on a $x = \frac{(c^2 + b - a)^2 - 4bc^2}{4c^2}$.