

FRITZ HOFMANN

Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 321-324

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__321_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈME RELATIF A UN CERTAIN RÉSEAU DE QUATRE
SECTIONS CONIQUES;**

PAR M. FRITZ HOFMANN, à Munich.

I. Etant données un point fixe S et quatre droites fixes quelconques A, B, C, D , dont aucune ne passe par le point S et qui ne passent pas toutes par un même point C, D , si l'on construit quatre sections coniques K_1, K_2, K_3, K_4 qui aient toutes le même point S

Ann. de Mathém., 3^e série, t. I (Juillet 1882).

pour foyer et telles que

$$\begin{array}{ll} K_1 \text{ touche } B, C, D & \text{en } \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \\ K_2 & A, C, D \text{ en } \alpha_2, \gamma_2, \delta_2, \\ K_3 & A, B, D \text{ en } \alpha_3, \beta_3, \delta_3, \\ K_4 & A, B, C \text{ en } \alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \end{array}$$

on a les relations

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \gamma_2) &= (\delta_1 \delta_2) = (\alpha_3 \alpha_4) = (\beta_3 \beta_4), \\ (\gamma_1 \gamma_4) &= (\beta_1 \beta_4) = (\alpha_2 \alpha_3) = (\delta_2 \delta_3), \\ (\gamma_2 \gamma_4) &= (\alpha_2 \alpha_4) = (\beta_1 \beta_3) = (\delta_1 \delta_3), \end{aligned}$$

en désignant par $(\gamma_1 \gamma_2)$ l'angle $\gamma_1 S \gamma_2$ sous lequel la distance des deux points γ_1, γ_2 est vue du point S.

Par la condition énoncée il n'est pas exclu que trois des lignes A, B, C, D ne se coupent en un seul point P; alors une des sections coniques se réduit à ce point P.

II. On peut énoncer le même théorème sous une forme différente :

Etant donnés trois droites quelconques A, B, C, un point fixe S et une section conique fixe K_3 qui touche les deux droites A, B en α_3, β_3 et qui ait S pour foyer, quand on décrit pour une tangente quelconque mobile D de cette section conique K_3 les deux sections coniques K_1, K_2 de foyer S, et telles que

$$\begin{array}{ll} K_1 \text{ touche } B, C, D & \text{en } \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \\ K_2 & A, C, D \text{ en } \alpha_2, \gamma_2, \delta_2, \end{array}$$

la distance des deux points mobiles δ_1, δ_2 sur la tangente mobile D est toujours vue sous le même angle du point S.

Dans le mouvement de la tangente D, les lignes A, C, D peuvent passer par un même point P, et B, C, D

par un point P' . Pour ces positions-là une des sections coniques K_1, K_2 dégénère en un point sans que la généralité du théorème soit altérée.

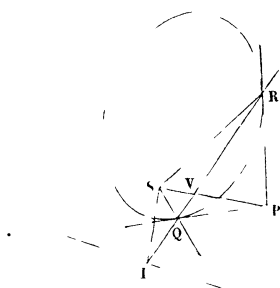
Ces relations curieuses se démontrent aisément à l'aide de deux théorèmes auxiliaires.

1. Quand on mène d'un point P (fig. 1) deux tangentes PR, PQ à une section conique, on a

$$\widehat{RSP} = \widehat{PSQ}.$$

Car, la directrice étant rencontrée par la droite RQ , en T , on déduit directement de la figure que la droite

Fig. 1



SP est la polaire du point T : donc le faisceau des quatre rayons $S(TRVQ)$ est harmonique, et puisque, d'après la définition du foyer, TS est perpendiculaire à SP comme polaire de T , on a

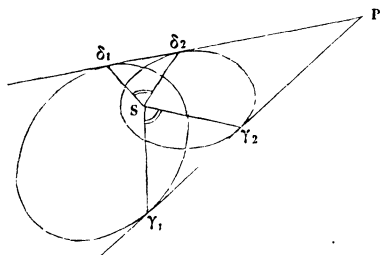
$$\widehat{RSP} = \widehat{PSQ}.$$

2. Quand deux sections coniques ont un foyer commun S (fig. 2) et deux tangentes communes $\delta_1 \delta_2, \gamma_1 \gamma_2$, on a

$$\widehat{\delta_1 S \delta_2} = \widehat{\gamma_1 S \gamma_2}.$$

Ce théorème se déduit du précédent. Donc on a d'abord les six identités suivantes, en ne considérant que les va-

Fig. 2.



leurs absolues des angles

$$\begin{aligned}(\alpha_2 \alpha_3) &= (\delta_2 \delta_3) = A_{23}, & (\beta_1 \beta_3) &= (\delta_1 \delta_3) = A_{13}, \\(\alpha_2 \alpha_4) &= (\gamma_2 \gamma_4) = A_{24}, & (\beta_1 \beta_4) &= (\gamma_2 \gamma_4) = A_{14}, \\(\alpha_3 \alpha_4) &= (\beta_3 \beta_4) = A_{34}, & (\gamma_1 \gamma_2) &= (\delta_1 \delta_2) = A_{12}.\end{aligned}$$

Mais il y a encore quatre équations évidentes entre les douze angles, savoir :

$$\begin{aligned}(\alpha_2 \alpha_3) + (\alpha_3 \alpha_4) + (\alpha_4 \alpha_2) &= (\beta_1 \beta_3) + (\beta_3 \beta_4) + (\beta_4 \beta_1) \\&= (\gamma_1 \gamma_2) + (\gamma_2 \gamma_4) + (\gamma_4 \gamma_1) \\&= (\delta_1 \delta_2) + (\delta_2 \delta_3) + (\delta_3 \delta_1) = 180^\circ,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}A_{23} + A_{34} + A_{24} &= A_{13} + A_{34} + A_{14} \\&= A_{12} + A_{24} + A_{14} \\&= A_{12} + A_{23} + A_{13}.\end{aligned}$$

On en déduit les identités suivantes

$$\begin{aligned}A_{12} &= A_{34}, \\A_{13} &= A_{24}, \\A_{14} &= A_{23}.\end{aligned}$$

ou

$$(\gamma_1 \gamma_2) = (\delta_1 \delta_2) = (\alpha_3 \alpha_4) = (\beta_3 \beta_4).$$