

L. KIEN

Concours d'admission à l'École centrale (première session, 1881)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 278-283

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__278_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE
(PREMIÈRE SESSION, 1881);

PAR M. L. KIEN,
Élève de l'Institution Notre-Dame, à Plaisance.

Soit

(1) $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$

l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à

ses axes; soient α , β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de l'ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation

$$(2) \quad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0,$$

dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$.

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points communs aux courbes (1) et (2); dans chacune d'elles, on mène le diamètre conjugué à la direction OP, et on projette le point O sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.

3° Par les points communs aux courbes (1) et (2), on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles, quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné m , menée par le point O.

On examinera en particulier le cas où $m = \frac{a^3}{b^3}$ et celui où $m = -\frac{a^3}{b^3}$.

1° L'équation d'une normale en un point (x, y) de l'ellipse est

$$\frac{Y - y}{a^2 y} = \frac{X - x}{b^2 x};$$

si cette normale est assujettie à passer par le point P(α , β), on a la condition

$$\frac{\beta - y}{a^2 y} = \frac{\alpha - x}{b^2 x}$$

ou

$$(2) \quad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

Les points d'incidence (x, y) sont à l'intersection de

l'ellipse et de l'hyperbole équilatère (2), car leurs coordonnées sont données par l'équation de cette ellipse (1) et l'équation (2), considérées comme simultanées; la première partie est donc démontrée.

2° Ces points d'incidence sont au nombre de quatre; en les joignant on obtient un quadrilatère, et les coniques passant par ces quatre points sont circonscrites à ce même quadrilatère.

Or nous savons que les diamètres correspondant à une direction donnée, dans les coniques circonscrites à un quadrilatère, passent par un point fixe Q; de plus, les perpendiculaires abaissées de O sur ces diamètres passent toutes par le point fixe O; le lieu de la projection de O sur ces mêmes diamètres sera donc le cercle décrit sur OQ comme diamètre.

Le calcul vérifie d'ailleurs ce raisonnement.

L'équation générale des coniques passant par les pieds des normales est

$$(K) \quad \alpha^2 \gamma^2 + b^2 x^2 + \lambda (c^2 x \gamma + b^2 \beta x - \alpha^2 \alpha \gamma) - \alpha^2 b^2 = 0.$$

La droite OP ayant pour coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$, les diamètres conjugués dans les coniques (K) ont pour équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0,$$

ou

$$(3) \quad (2b^2\alpha + \lambda c^2\beta)x + (\lambda c^2\alpha + 2\alpha^2\beta)y - \lambda c^2\alpha\beta = 0.$$

L'équation des perpendiculaires abaissées de O sur ces diamètres est donc

$$(4) \quad y = \frac{\lambda c^2\alpha + 2\alpha^2\beta}{2b^2\alpha + \lambda c^2\beta} x.$$

En éliminant λ entre les équations (3) et (4), on a le lieu. On trouve l'équation

$$\begin{aligned} & (b^2\alpha x + \alpha^2\beta y)(\beta y - \alpha x) \\ & - (b^2\alpha y - \alpha^2\beta x)(\beta x + \alpha y - \alpha\beta) = 0, \end{aligned}$$

ou simplement

$$(x^2 + y^2)(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) - (a^2\beta x - b^2\alpha y)\alpha\beta = 0,$$

équation d'un cercle passant par l'origine.

3° Déterminons λ dans l'équation (K) pour que cette équation représente une parabole. Il faut ici que

$$\lambda^2 c^4 - 4a^2 b^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \pm \frac{2ab}{c^2}.$$

Par suite, l'équation des deux paraboles passant par les pieds des normales issues de P est

$$(ay \pm bx)^2 \pm \frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 = 0.$$

Séparons les signes, en remarquant qu'après avoir calculé pour les signes supérieurs, on passera aux signes inférieurs en changeant b en $-b$ dans cette dernière équation. On a donc

$$(5) \quad (ay + bx)^2 + \frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 = 0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole est

$$Af'_x + Bf'_y = 0,$$

ou

$$(6) \quad (bx + ay)(a^2 + b^2) + \frac{ab}{c^2}(b^3\beta - a^3\alpha) = 0.$$

Le point P étant sur la droite $y = mx$, on a

$$(7) \quad \beta = m\alpha.$$

En éliminant α, β entre les équations (5), (6), (7), on a le lieu du sommet de l'une des paraboles.

On trouve ainsi l'équation

$$(8) \quad \begin{cases} 2(b^2mx - a^2y)(bx + ay)(a^2 + b^2) \\ - (b^3m - a^3) \\ \times (ay + bx + ab)(ay + bx - ab) = 0. \end{cases}$$

Si l'on considérait la deuxième parabole, le lieu de son sommet serait

$$2(b^2mx - a^2y)(bx - ay)(a^2 + b^2) - (b^3m + a^3)(ay - bx + ab)(ay - bx - ab) = 0.$$

On pourrait chercher les axes de la conique (8), puis la construire facilement. On pourrait aussi chercher pour quelles valeurs de m la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. L'origine est d'ailleurs centre de la conique.

En remplaçant m par $\frac{a^3}{b^3}$ dans l'équation (8), on obtient

$$bx + ay = 0,$$

équation d'une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse, et, en remplaçant m par cette même valeur dans l'équation du lieu relatif à la deuxième parabole des pieds des normales, on obtient

$$(bx - ay)(ax - by)(a^2 + b^2) - ab(ay - bx + ab)(ay - bx - ab) = 0,$$

ou plus simplement

$$(a^2x^2 + b^2y^2)ab - (a^4 + b^4)xy + a^3b^3 = 0.$$

On a

$$(a^4 + b^4)^2 - 4a^3b^4 = (a^4 - b^4)^2 > 0;$$

le lieu est donc, dans ce cas, une hyperbole.

L'équation des asymptotes de cette hyperbole est

$$ab(a^2x^2 + b^2y^2) - (a^4 + b^4)xy = 0.$$

En remplaçant m par $-\frac{a^3}{b^3}$ dans les deux équations du lieu trouvé plus haut, il vient pour la première

$$(a^2x^2 + b^2y^2)ab - (a^4 + b^4)xy - a^3b^3 = 0.$$

équation d'une hyperbole ayant mêmes asymptotes que la précédente.

Pour la deuxième équation, on trouve

$$bx - ay = 0,$$

équation d'une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse.

Note. — La même question a été résolue par M. Chaigneau, élève de l'école préparatoire Duvigneau de Lanneau (classe de M. Geoffroy), et par M. H. Lez.
