

MAURICE D'OCAGNE

Sur le développement des logarithmes et des exponentielles

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 241-244

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__241_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES LOGARITHMES ET DES EXPONENTIELLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève de l'École Polytechnique.

Considérons le développement d'une fonction $f(x)$ suivant les puissances ascendantes d'une fonction quelconque $\varphi(x)$ de la variable

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) \\ \quad \quad \quad + A_2 \varphi(x)^2 + \dots + A_n \varphi(x)^n + \dots, \end{cases}$$

et proposons-nous de trouver le développement de $\log f(x)$ suivant les puissances de $\varphi(x)$

$$(2) \quad \begin{cases} \log f(x) = a_0 + a_1 \varphi(x) \\ \quad \quad \quad + a_2 \varphi(x)^2 + \dots + a_n \varphi(x)^n + \dots, \end{cases}$$

en supposant ces deux développements convergents pour la fonction $\varphi(x)$ choisie.

On voit d'abord immédiatement que

$$a_0 = \log A_0.$$

Cherchons maintenant la valeur d'un coefficient quelconque a_n . A cet effet, dérivons l'expression (1) par rapport à x

$$\begin{aligned} f'(x) = A_1 \varphi'(x) + 2 A_2 \varphi(x) \varphi'(x) + \dots \\ + n A_n \varphi(x)^{n-1} \varphi'(x) + \dots \end{aligned}$$

Par suite,

$$(3) \quad \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'(x) [A_1 + 2 A_2 \varphi(x) + \dots + n A_n \varphi(x)^{n-1} + \dots]}{A_0 + A_1 \varphi(x) + \dots + A_n \varphi(x)^n + \dots} \right\}.$$

Dérivons maintenant l'expression (2) par rapport à x

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log f(x)}{dx} &= a_1 \varphi'(x) + 2 a_2 \varphi(x) \varphi'(x) + \dots \\ &\quad + n a_n \varphi(x)^{n-1} \varphi'(x) + \dots \end{aligned} \right.$$

Les premiers membres de (3) et (4) étant identiques, il en est de même des seconds; nous aurons donc, après avoir divisé de part et d'autre par $\varphi'(x)$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2 \varphi(x) + \dots + n\mathbf{A}_n \varphi(x)^{n-1} + \dots \\ &= [\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \varphi(x) + \dots + n\mathbf{a}_n \varphi(x)^{n-1} + \dots] \\ &\times [\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \varphi(x) + \dots + \mathbf{A}_n \varphi(x)^n + \dots]. \end{aligned}$$

L'identification des deux membres donne

$$[\alpha] \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 A_0, \\ 2A_2 = 2\alpha_2 A_0 + \alpha_1 A_1, \\ 3A_3 = 3\alpha_3 A_0 + 2\alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2, \\ \dots\dots\dots, \\ nA_n = n\alpha_n A_0 + (n-1)\alpha_{n-1} A_1, \\ \qquad\qquad\qquad + (n-2)\alpha_{n-2} A_2 + \dots + \alpha_1 A_{n-1}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Pour tirer de là la valeur de a_n , prenons les n premières équations et écrivons-les comme suit

$$\begin{array}{rcccccl} A_0 a_1 & + 0 a_2 & + 0 a_3 & + \dots + 0 a_n & = A_1, \\ A_1 a_1 & + 2 A_0 a_2 & + 0 a_3 & + \dots + 0 a_n & = 2 A_2, \\ A_2 a_1 & + 2 A_1 a_2 & + 3 A_0 a_3 & + \dots + 0 a_n & = 3 A_3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ A_{n-1} a_1 & + 2 A_{n-2} a_2 & + 3 A_{n-3} a_3 & + \dots + n A_0 a_n & = n A_n. \end{array}$$

De là nous tirerons pour la valeur de a_n , en remarquant que le déterminant qui forme le dénominateur se réduit à sa diagonale,

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ A_1 & 2A_0 & 0 & \dots & 0 & 2A_2 \\ A_2 & 2A_1 & 3A_0 & \dots & 0 & 3A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-2} & 2A_{n-3} & 3A_{n-4} & \dots & (n-1)A_0 & (n-1)A_{n-1} \\ A_{n-1} & 2A_{n-2} & 3A_{n-3} & \dots & (n-1)A_1 & nA_n \end{vmatrix}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n A_0^n}$$

Telle est la formule qui résout le problème.

Comme application, nous allons en déduire le développement classique de $\log(1+x)$.

Dans ce cas, nous avons

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1.$$

Tous les autres coefficients A sont nuls. Nous avons alors

$$a_0 = \log A_0 = 0,$$

et, par application de la formule précédente,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}}{1.2.3\dots n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 1.2.3\dots(n-1)}{1.2.3\dots n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

C'est bien la formule connue.

Il est parfois plus facile de développer le logarithme d'une fonction que cette fonction elle-même; c'est ce qui a lieu en particulier pour le développement de l'intégrale eulérienne $\Gamma(x)$, suivant les puissances croissantes de $(x-1)$. On peut donc avoir à traiter le problème inverse de celui que nous venons de résoudre. On a d'abord

$$A_0 = e^{a_0}.$$

Il faut maintenant des équations $[x]$ tirer la valeur de A_n en fonction des a . A cet effet, nous prendrons les

n premières de ces équations et nous les écrivons

$$\begin{array}{lll}
 A_1 + & 0 A_2 + & 0 A_3 + \dots + 0 A_n = a_1 A_0, \\
 - a_1 A_1 + & 2 A_2 + & 0 A_3 + \dots + 0 A_n = 2 a_2 A_0, \\
 - 2 a_2 A_1 - & a_1 A_2 + & 3 A_3 + \dots + 0 A_n = 3 a_3 A_0, \\
 \dots\dots\dots & & \\
 -(n-1) a_{n-1} A_1 - (n-2) a_{n-2} A_2 - (n-3) a_{n-3} A_3 + \dots + n A_n = n a_n A_0,
 \end{array}$$

d'où nous tirons

$$A_n = \frac{
 \begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\
 -a_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2a_2 \\
 -2a_2 & -a_1 & 3 & \dots & 0 & 3a_3 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots \\
 -(n-2)a_{n-2} & -(n-3)a_{n-3} & -(n-4)a_{n-4} & \dots & n-1 & (n-1)a_{n-1} \\
 -(n-1)a_{n-1} & -(n-2)a_{n-2} & -(n-3)a_{n-3} & \dots & -a_1 & na_n
 \end{vmatrix}
 }{1.2.3\dots n} e^{na_0}.$$

Comme vérification de cette formule, nous allons en déduire le développement de e^x . Il suffit de faire

$$a_1 = 1,$$

et tous les autres a nuls, ce qui donne

$$A_n = \frac{
 \begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0
 \end{vmatrix}
 }{1.2.3\dots n} = \frac{1}{1.2.3\dots n},$$

qui est bien la formule connue.