

BERLOTY

**Sur les équations algébriques de la
forme $(x^p - a^p)\varphi(x) = 0$**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 173-176

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__173_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DE LA FORME

$$(x^p - a^p) \psi(x) = 0;$$

PAR LE P. BERLOTY.

THÉORÈME. — *Soit*

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$

$A_0, A_1, \dots$ étant des constantes et m un entier. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$F(x) = 0$$

admette les p racines de l'équation

$$x^p - a^p = 0$$

est que ces p racines appartiennent à chacune des équa-

tions obtenues en annulant les p polynômes formés par la somme des termes pris dans $F(x)$, de p en p , successivement à partir du 1^{er}, du 2^e, ..., du $p^{\text{ième}}$, c'est-à-dire aux équations

$$(I) \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = A_0 x^m + A_p x^{m-p} + \dots + A_{np} x^{m-np} + \dots = 0, \\ \vdots \\ \varphi_i(\mathcal{X}) = A_{i-1} x^{m-i+1} + \dots + A_{np+i-1} x^{m-np-i+1} + \dots = 0, \\ \vdots \\ \varphi_p(x) = A_{p-1} x^{m-p+1} + \dots = 0. \end{cases}$$

En effet, si $F(x) = 0$ admet les racines de l'équation $x^p - a^p = 0$, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$F(x) = (x^p - a^p) \psi(x),$$

les p transformées en

$$\frac{x}{\alpha_1}, \quad \frac{x}{\alpha_2}, \quad \dots, \quad \frac{x}{\alpha_i}, \quad \dots, \quad \frac{x}{\alpha_p}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_p$ désignant les racines de l'équation $x^p - 1 = 0$) devront admettre ce même facteur dans leur premier membre, car le binôme $x^p - a^p$ ne change pas par cette transformation.

Réciproquement, soient

$$(2) \quad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \dots, \quad f_p(x) = 0$$

les p transformées; si les polynômes $f_1, f_2, \dots, f_p$ admettent $x^p - a^p$ comme facteur, il en sera de même de $F(x)$; car $x^p - a^p$ ne change pas quand on y remplace x par $\alpha_i x$, et ce changement fait dans $f_i(x)$ reproduit $F(x)$, quel que soit l'indice i de 1 à p .

Cela posé, tenant compte des relations

$$\alpha_i^p = 1, \quad \alpha_i^{p+q} = \alpha_i^q$$

et chassant les dénominateurs, on obtient, pour la trans-

formée $f_i(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f_i(x) = & A_0 x^m + \alpha_i A_1 x^{m-1} + \alpha_i^2 A_2 x^{m-2} + \dots \\ & + \alpha_i^{p-1} A_{p-1} x^{m-p+1} + A_p x^{m-p} \\ & + \alpha_i A_{p+1} x^{m-p-1} + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en remarquant que la première colonne n'est autre que $\varphi_1(x)$, la deuxième que $\varphi_2(x)$, etc.,

$$(3) \quad f_i = \varphi_1 + \alpha_i \varphi_2 + \alpha_i^2 \varphi_3 + \dots + \alpha_i^{p-1} \varphi_p = 0.$$

On a donc aussi, en faisant la somme des équations semblables, multipliées respectivement par la puissance $p-j$ de la quantité α correspondante (j étant un entier pris entre 0 et $p-1$),

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma \alpha_i^{p-j} f_i = \varphi_1 \Sigma \alpha_i^{p-j} + \varphi_2 \Sigma \alpha_i^{p-j+1} + \dots \\ \phantom{\Sigma \alpha_i^{p-j} f_i} + \varphi_{j+1} \Sigma \alpha_i^p + \dots = 0, \end{cases}$$

i prenant sous les divers signes Σ toutes les valeurs entières de 1 à p .

D'ailleurs, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, on a, suivant que l'exposant μ est ou non un multiple de p ,

$$\Sigma \alpha_i^\mu = p, \quad \text{ou} \quad \Sigma \alpha_i^\mu = 0.$$

Si donc on remarque que $f_i(x)$ contient les seules puissances 0, 1, 2, ... ($p-1$) de α_i , on voit sans peine que, dans l'équation (4), tous les termes s'évanouissent, sauf le seul terme $\varphi_{j+1} \Sigma \alpha_i^p$; d'où l'on conclut que, si toutes les équations (2) sont satisfaites par les racines de l'équation $x^p - a^p = 0$, il en sera de même de l'équation

$$\varphi_{j+1} = 0.$$

Or j est quelconque entre 0 et $p-1$; donc les p équations (1)

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_p = 0$$

admettent au premier membre $x^p - a^p$ comme facteur. A leur tour, si les équations (1) sont satisfaites par les racines de l'équation $x^p - a^p = 0$, les équations (2) le seront aussi; car chacune de ces dernières, d'après la formule (3), n'est autre qu'une composition linéaire et homogène des polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.

Ainsi se trouve établi le théorème proposé. On peut l'énoncer dans les termes suivants :

La condition nécessaire et suffisante pour que $F(x)$ soit de la forme $(x^p - a^p)\psi(x)$ est que les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ soient de la même forme.
