

MAURICE D'OCAGNE

Sommation d'une série remarquable

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 171-173

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__171_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOMMATION D'UNE SÉRIE REMARQUABLE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

Dans un Mémoire inséré aux *Annales de Gergonne* ⁽¹⁾,
de Stainville considère une série remarquable dont il
étudie les propriétés et fait diverses applications.

Gergonne ⁽²⁾, puis Ampère ⁽³⁾ sont revenus sur

(1) Tome IX, page 229.

(2) Tome IX, pages 261 et 270.

(3) Tome XV. page 369.

cette série, simplifiant les démonstrations du premier auteur, poussant plus loin les conséquences de son théorème; mais aucun de ces géomètres ne s'est occupé de la sommation de cette série; cette recherche fait l'objet de la présente Note.

La série de Stainville est

$$1 + a \frac{z}{1} + a(a+k) \frac{z^2}{1.2} + \dots \\ + a(a+k) \dots [a+(n-1)k] \frac{z^n}{1.2 \dots n} + \dots,$$

prise pour les valeurs de $z < \frac{1}{k}$, et que je représenterai par $S(a, k)$.

La propriété fondamentale de cette série, démontrée dans les Mémoires cités, consiste en ce que

$$S(a+b, k) = S(a, k) S(b, k).$$

Cela posé, dérivons $S(a, k)$ par rapport à z ,

$$\frac{dS(a, k)}{dz} = a + a(a+k) \frac{z}{1} + \dots \\ + a(a+k) \dots [a+(n-1)k] \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \dots \\ = a \left[1 + (a+k) \frac{z}{1} + \dots \right. \\ \left. + (a+k) \dots [a+(n-1)k] \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \dots \right] \\ = aS(a+k, k),$$

ou, d'après la propriété fondamentale,

$$\frac{dS(a, k)}{dz} = aS(a, k) S(k, k).$$

Mais

$$S(k, k) = 1 + kz + k^2 z^2 + \dots + k^n z^n + \dots$$

Or

$$z < \frac{1}{k}, \quad \text{ou} \quad kz < 1.$$

Donc,

$$S(k, k) = \frac{1}{1 - kz};$$

par suite,

$$\frac{dS(a, k)}{dz} = \frac{a}{1 - kz} S(a, k),$$

ou

$$\frac{dS(a, k)}{S(a, k)} = a \frac{dz}{(1 - kz)}.$$

Intégrons alors, en remarquant que, pour $z = 0$, $S(a, k) = 1$; nous avons

$$\log S(a, k) = -\frac{a}{k} \log(1 - kz),$$

et, en remontant des logarithmes aux nombres,

$$S(a, k) = (1 - kz)^{-\frac{a}{k}}.$$