Nouvelles annales de mathématiques

H. Lez

Concours d'admission à l'École centrale en 1880 (première session)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 122-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__122_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1880

(PREMIÈRE SESSION);

PAR M. H. LEZ.

Soient Ox, Oy *deux axes rectangulaires, et sur* Ox *un point* A, *sur* Oy *un point* B. *On mène par le point* A *une droite quelconque* AR *de coefficient angulaire* m.

1° *Former l'équation de l'hyperbole* H, *qui est tangente à l'axe* Ox *au point* O, *qui passe par le point* B *et pour laquelle la droite* AR *est une asymptote.*

2° *On fait varier* m *et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en* B *à l'hyperbole* H *et de l'asymptote* AR.

3° *On considère le cercle circonscrit au triangle* AOB; *ce cercle coupe l'hyperbole* H *aux points* O *et* B *et en deux autres points* P *et* Q. *Former l'équation de cette droite* PQ; *puis, faisant varier* m, *trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite* PQ *avec les parallèles menées par le point* O, *soit à l'asymptote* AR, *soit à la seconde asymptote de l'hyperbole* H.

Si la droite

$$\text{(1)} \qquad \text{AR} \quad \text{ou} \quad y - mx + ma = 0$$

est une asymptote, l'autre asymptote est de la forme

$$y + \gamma x + \delta = 0,$$

et l'on pourra représenter l'hyperbole H par

$$\text{(2)} \qquad (y - mx + ma)(y + \gamma x + \delta) - k^2 = 0.$$

Pour que cette courbe passe par l'origine O et soit tangente à l'axe Ox, il faut que le terme constant et le terme en x disparaissent, ce qui donne

$$ma\delta = k^2, \quad \delta = a\gamma.$$

Alors l'équation (2) devient

$$\text{(3)} \qquad y^2 - \gamma m x^2 + (\gamma - m)xy + a(m + \gamma)y = 0.$$

1° Cette hyperbole passera aussi par le point

$$\text{B}(x = 0, \ y = b),$$

si l'on a

$$a\gamma = -(b + am),$$

ce qui ramène l'équation (3) à

$$(4)\quad ay^2 + m(b+am)x^2 - (b+2am)xy - aby = 0 = \mathrm{H}.$$

2° Le coefficient angulaire des tangentes à cette hyperbole étant

$$\mu = \frac{2m(b+am)x - y(b+2am)}{ab + (b+2am)x - 2ay},$$

au point B il sera

$$\mu = \frac{b+2am}{a}.$$

La tangente au même point aura pour équation

$$(5)\qquad a(y-b) = (b+2am)x.$$

Éliminant m entre les équations (1) et (5), on obtiendra pour le lieu demandé l'équation

$$bx^2 + axy + a^2y - a^2b = 0,$$

décomposable en deux facteurs linéaires,

$$(x+a)(ay+bx-ab) = 0,$$

dont le second est la droite AB [1].

3° Soit $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ l'équation de PQ, celle de OB étant $x = 0$; la courbe

$$\mathrm{H} - \lambda x(qx + py - pq) = 0$$

deviendra le cercle

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

---

(1) M. Moret-Blanc en conclut ce théorème :

Si, par un point O *d'une hyperbole, on mène une tangente* OA *et une normale* OB *qui rencontre l'hyperbole en un point* B, *la tangente en* B *à l'hyperbole et la perpendiculaire à la tangente* OA, *au point où elle rencontre une des asymptotes, se rencontrent sur l'autre asymptote.*

circonscrit au triangle AOB, si

$$\lambda = -\frac{a^2}{pq}, \quad p = \frac{a^2}{a - m(b + am)}, \quad q = \frac{a^2}{b + 2am}.$$

On a ainsi pour la droite PQ

$$(6) \qquad (b + 2am)y + [a - m(b + am)]x = a^2.$$

L'équation de l'hyperbole H pouvant s'écrire sous la forme

$$[y - m(x - a)] \times [ay - (b + am)(x + a)] + a^2 m(b + am) = 0,$$

on voit que les droites menées par l'origine O parallèlement aux deux asymptotes seront

$$y = mx \quad \text{et} \quad y = \frac{b + am}{a} x.$$

Éliminant successivement m entre ces équations et celle de la droite (6), on trouve que les lieux demandés se confondent et ne sont autre chose que le cercle

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

décrit sur OA comme diamètre ([1]).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, qui a également résolu la question proposée à la deuxième session et dont une solution a paru (2e série, t. XX, p. 464), par M. Chambeau, élève de Notre-Dame du Sacré-Cœur, à Plaisance, et par M. J. Boudènes, à Avignon.

([1]) M. Moret-Blanc en conclut ce théorème :

Si, par un point O *d'une hyperbole, on mène une tangente* OA *qui rencontre une asymptote en* A *et une normale* OB *qui rencontre l'hyperbole en* B, *la circonférence circonscrite au triangle* AOB *coupe l'hyperbole en deux autres points* P *et* Q *tels que la droite* PQ *rencontre les parallèles menées par le point aux asymptotes en deux points appartenant à la circonférence décrite sur* OA *comme diamètre.*

MM. Moret-Blanc et Pisani ont résolu les questions 1352 et 1355, dont une solution a été publiée (2e série, t. XX, p. 340, 342 et 344). M. Pisani a aussi résolu les questions 1373 et 1374. M. l'abbé Geneix-Martin a résolu la question 1376, au sujet de laquelle M. Catalan a fait une rectification (2e série, t. XX, p. 528). Cette question a aussi été résolue par MM. J.-J.-A. Mathieu, lieutenant-colonel d'artillerie; H. Lez; N. Goffart; F. Pisani; François Borletti, ingénieur à Milan; Juan Gavino, au Ministère de la Marine, à Madrid; Adrien Palaz et Henri Vuilleumier, élèves à l'École polytechnique de Zurich; A. Hottenhoff, E. Stache, J. de Munck, élèves de l'Athénée de Bruxelles; V. Fleury, L. Meyer, H. Vielle, A. Leblond, élèves du lycée du Havre; J. Boudènes, du lycée d'Avignon.