

HENRI CARTIER

Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 1
(1882), p. 118-122

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__118_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880;**

PAR M. HENRI CARTIER,
Élève du lycée d'Angoulême.

On donne une ellipse et un cercle ayant pour centre un foyer F de l'ellipse. On demande :

1° De trouver le lieu I du point tel que, si l'on mène de ce point des tangentes à l'ellipse et au cercle, les coefficients angulaires m et m' des tangentes à l'ellipse et les coefficients angulaires k et k' des tangentes au cercle vérifient la relation

$$2(mm' + kk') = (m + m')(k + k');$$

2° De trouver l'équation du lieu P du point de contact des tangentes menées par un point donné à tous les lieux I correspondant aux diverses valeurs du carré du rayon du cercle;

3° De construire le lieu P quand le point donné est sur le grand axe de l'ellipse;

4° De construire le lieu P lorsque le point donné est sur la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse.

1° Prenons le foyer F pour origine, et supposons que ce soit le foyer de droite. L'équation de l'ellipse est

$$(E) \quad \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

celle du cercle est

$$(C) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Soit (x, y) un point I. Les coefficients angulaires des

tangentes menées de ce point à l'ellipse sont donnés par

$$y - m(x + c) = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

ou

$$m^2[(x + c)^2 - a^2] - 2m\gamma(x + c) + \gamma^2 - b^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées au cercle sont donnés par

$$y - kx = \pm \sqrt{r^2(1 + k^2)}$$

ou

$$(x^2 - r^2)k^2 - 2kx\gamma + \gamma^2 - r^2 = 0.$$

Ces coefficients vérifiant la relation de l'énoncé, on a

$$\frac{\gamma^2 - b^2}{(x + c)^2 - a^2} + \frac{\gamma^2 - r^2}{x^2 - r^2} = \frac{2x\gamma^2(x + c)}{[(x + c)^2 - a^2](x^2 - r^2)}$$

ou

$$(1) \quad (x^2 + \gamma^2)(b^2 + r^2) + 2cr^2x - 2b^2r^2 = 0.$$

Ce lieu I est un cercle ayant son centre sur le grand axe de l'ellipse.

2° Soit (α, β) un point M. Sa polaire par rapport à (I) est

$$\alpha x(b^2 + r^2) + cr^2x + cr^2\alpha + \beta\gamma(b^2 + r^2) - 2b^2r^2 = 0.$$

Éliminons r^2 entre cette équation et I, on a le second lieu

$$(P) \quad (x^2 + \gamma^2)(cx + c\alpha - 2b^2) - 2(cx - b^2)(\alpha x + \beta\gamma) = 0.$$

Ce lieu est du troisième degré, et passe aux points circulaires à l'infini.

La tangente à l'origine est $\alpha x + \beta\gamma = 0$. Elle correspond au cas où $r = 0$; le cercle I se réduit à un point F, et la polaire de M par rapport à ce cercle de rayon nul est la perpendiculaire $\alpha x + \beta\gamma = 0$ menée en F à FM.

Le lieu passe en M où la tangente est parallèle à $\alpha x + \beta y = 0$. Ceci est évident, si l'on remarque que le cercle I passe par M pour une valeur particulière de r .

Si nous considérons le cercle ayant FM pour diamètre, nous voyons que le lieu est doublement tangent à ce cercle, la corde des contacts étant FM. Comme le lieu et le cercle se coupent généralement en six points, les deux autres points sont en même temps réels ou imaginaires.

Le lieu a pour asymptote réelle la droite

$$cx - 2b^2 + cx = 0,$$

qui est perpendiculaire à Ox . L'équation (P) montre que le lieu coupe cette asymptote et la tangente à l'origine $\alpha x + \beta y = 0$ au même point.

Les points de la courbe situés sur Ox , autres que l'origine, ont leurs abscisses égales à

$$\frac{2b^2 - \alpha c \pm (2b^2 - \alpha c)}{2c}.$$

L'un est la projection de M sur cet axe, l'autre a pour abscisse $\frac{2b^2}{c}$.

De même les deux points situés sur Oy sont réels, et l'un est la projection de M sur cet axe.

Le lieu a donc, dans le cas général, la forme de la figure.

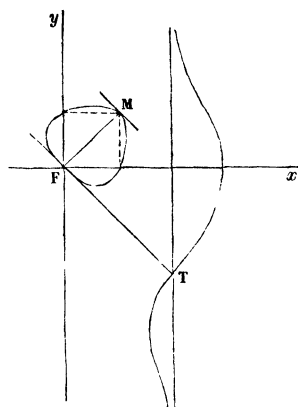
3° Si P est sur le grand axe de l'ellipse $\beta = 0$, l'équation (P) devient

$$(x^2 + y^2)(cx + cx - 2b^2) - 2\alpha x(cx - b^2) = 0.$$

Le lieu est symétrique par rapport à l'origine. Il jouit des mêmes propriétés que dans les cas précédents.

Nous pouvons remarquer que, dans ce cas, l'asymptote et la tangente à l'origine devenant parallèles, le point T est rejeté à l'infini.

La partie fermée de la courbe ne coupe pas le cercle

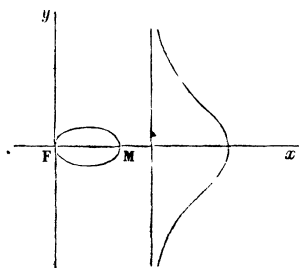


$x^2 + y^2 - 2ax = 0$, ayant FM pour rayon, ailleurs qu'en M ou F. Écrivons P sous la forme

$$(P) (x^3 + y^2 - 2ax)(cx - b^2) + (x^2 + y^2)(cx - b^2) = 0.$$

Les points communs au cercle et à (P) sont sur les droites

$$x^2 + y^2 = 0.$$



Ils sont imaginaires, car, s'ils étaient réels, ces droites

seraient réelles, puisqu'elles auraient un deuxième point réel à l'origine.

Le lieu a la forme de la figure. •

Son troisième point de rencontre avec l'axe Ox a pour abscisse $\frac{2b^2}{c}$.

3° Si le point M est sur la directrice correspondant au foyer F , on a

$$x = \frac{b^2}{c};$$

l'équation (P) devient

$$(cx - b^2) \left[x^2 + y^2 - 2 \left(\frac{b^2}{c} x + \frac{b^2}{c} y \right) \right] = 0. \quad \bullet$$

Il se décompose en la directrice

$$cx - b^2 = 0,$$

relative au foyer F , et en

$$x^2 + y^2 - 2 \left(\frac{b^2}{c} x + \frac{b^2}{c} y \right) = 0:$$

c'est le cercle ayant pour FM son rayon.

Note. — Solutions analogues par MM. l'abbé Geneix-Martin, de l'école Saint-Sigisbert, à Nancy; Grimaud, maître répétiteur au lycée de Tarbes; L. Kien, élève de Notre-Dame du Sacré-Cœur, à Plaisance; H. Lez.