

P. BARBARIN

Solution d'une question d'analyse proposée au concours d'agrégation de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 57-65

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__57_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UNE QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE
AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879;**

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

*On donne un ellipsoïde et, sur cette surface, deux
points diamétralement opposés A et B; on joint les*

points A et B à un point variable m de l'ellipsoïde :
 1° trouver une surface S telle que le plan tangent au point M , où elle est rencontrée par la droite Am , soit parallèle à la droite Bm ; 2° trouver sur cette surface une courbe telle que la tangente en chaque point M de cette courbe et l'intersection du plan tangent à la surface en M avec le plan qui passe par ce point M et par le diamètre AB soient deux tangentes conjuguées par rapport à la surface.

1° L'ellipsoïde, rapporté à la droite AB comme axe des x et à deux diamètres conjugués Oy , Oz du plan conjugué à Ox , a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si x_1 , y_1 , z_1 sont les coordonnées du point variable m , on a donc la relation

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Soient x , y , z les coordonnées du point M de la surface S . Puisqu'il se trouve sur Am , on a les égalités

$$(2) \quad \frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Enfin le plan tangent au point M à la surface S a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

en désignant par p , q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Or il doit être parallèle à la droite Bm ; par conséquent

$$(3) \quad p(x_1 + a) + qy_1 - z_1 = 0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer x_1 , y_1 , z_1 entre les équations (1), (2), (3).

Les équations (2) donnent facilement

$$\frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{p(x-a)+qy-z}{-2ap},$$

d'où

$$x_1 = a \frac{qy-z-p(x-a)}{p(x-a)+qy-z},$$

$$y_1 = a \frac{-2py}{p(x-a)+qy-z},$$

$$z_1 = a \frac{-2pz}{p(x-a)+qy-z}.$$

Je substitue ces valeurs de x_1, y_1, z_1 dans l'équation (1) et j'ai, en réduisant,

$$p \left[p \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - \frac{(x-a)(qy-z)}{a^2} \right] = 0.$$

Or, sur la surface cherchée, p n'est pas nul, car, s'il l'était, cette surface serait un cylindre ayant ses génératrices parallèles à AB. Son plan tangent au point M ne serait donc autre que le plan AmB , et la surface serait ce plan lui-même; or ce plan est quelconque: donc tous les points de l'espace jouiraient de la propriété des points M. Nous excluons cette hypothèse en supposant $p \gtrless 0$; il reste donc l'équation

$$p \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - \frac{(x-a)(qy-z)}{a^2} = 0,$$

ou

$$(4) \quad p \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) q - \frac{(x-a)y}{a^2} + \frac{(x-a)z}{a^2} = 0,$$

qui est l'équation aux dérivées partielles de la surface S.

Pour l'intégrer, je résoudrai le système

$$\frac{dx}{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = - \frac{dy}{\frac{(x-a)y}{a^2}} = - \frac{dz}{\frac{(x-a)z}{a^2}},$$

qui donne successivement

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{ou} \quad y = Cz,$$

et

$$\frac{(x-a)}{a^2} z dx + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dz = 0,$$

ou

$$\frac{x-a}{a^2} dx + \left(\frac{C^2}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) z dz = 0,$$

ou enfin

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = C_1.$$

L'équation générale de la surface S est donc

$$(5) \quad F \left[\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \frac{y}{z} \right] = 0.$$

La génération de cette surface est fort simple; elle est produite, en effet, par des ellipses qui sont les intersections de plans conduits suivant AB avec des ellipsoïdes homothétiques au proposé et ayant le point A pour centre.

Solution géométrique. — Des considérations géométriques extrêmement simples permettent de conclure immédiatement ce résultat. En effet, dans l'ellipse suivant laquelle le plan AmB coupe l'ellipsoïde proposé, les cordes Am, Bm sont conjuguées. La tangente à la section de la surface S par ce même plan est MT, parallèle à Bm, et par conséquent aussi conjuguée de la direction AM; cette tangente est la même que celle de l'ellipse qui a A pour centre et est homothétique de l'ellipse AmB; donc cette ellipse est la section de la surface par le plan AmB.

En particulier, tous les ellipsoïdes homothétiques au proposé et ayant A pour centre rentrent dans la catégorie des surfaces S ainsi engendrées.

2° L'intersection du plan tangent à la surface en M avec le plan AMB n'est autre chose que la tangente au point M à l'ellipse génératrice du plan AMB. Ses équations sont

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \quad \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

ou

$$\frac{X - x}{z - qy} = \frac{Y - y}{py} = \frac{Z - z}{pz}.$$

Celles de la tangente à la courbe cherchée au point M sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Ces deux droites doivent être des tangentes conjuguées, c'est-à-dire être parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice au point M.

Au voisinage du point M, le Z de la surface S peut se développer, d'après le théorème de Taylor étendu aux fonctions de deux variables, en série ordonnée suivant les puissances croissantes des accroissements $X - x$, $Y - y$ des variables x, y ; ainsi

$$\begin{aligned} Z = z + \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y) \\ + \frac{1}{1.2} \left[\frac{d^2 z}{dx^2} (X - x)^2 \right. \\ \left. + 2 \frac{d^2 z}{dxdy} (X - x)(Y - y) + \frac{d^2 z}{dy^2} (Y - y)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

ou, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\begin{aligned} Z = z + p(X - x) + q(Y - y) \\ + \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \end{aligned}$$

en posant, suivant l'usage,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t.$$

Un plan parallèle au plan tangent au point M, et infiniment voisin, a pour équation

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = \varepsilon.$$

Si donc on élimine Z entre ces deux dernières équations, on a

$$r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = 2\varepsilon,$$

équation qui est celle de la projection de l'indicatrice sur le plan xy .

Or les projections de deux diamètres conjugués d'une conique sont des diamètres conjugués de sa projection; donc il doit en être ainsi pour les deux tangentes dont nous nous occupons, ce qui nécessite la relation

$$r + s\left(\frac{p}{z - qy} \frac{y}{x} + \frac{dy}{dx}\right) + t \frac{p}{dx} \frac{y}{(z - qy)} = 0$$

ou

$$[r(z - qy) + psy]dx + [s(z - qy) +pty]dy = 0.$$

C'est l'équation différentielle qui définit la courbe cherchée sur la surface S. Cette équation peut se simplifier en la mettant sous la forme

$$(6) \quad (r dx + s dy)(z - qy) + py(s dx + t dy) = 0.$$

Si, en effet, on tient compte de l'équation (4) et qu'on élimine $z - qy$ entre elles, on a

$$p \left[(r dx + s dy) \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - (s dx + t dy) \frac{x - a}{a^2} y \right] = 0.$$

Si l'on suppose $p = 0$, l'équation (4) donne $z - qy = 0$ ou $x - a = 0$. Dans le premier cas, l'équation (6) est vérifiée identiquement : donc les courbes déterminées par les équations

$$p = 0, \quad z - qy = 0,$$

c'est-à-dire

$$z = f(y), \quad z = yF(x),$$

sont des solutions singulières de la question; en éliminant z , on a, par l'équation

$$f(y) = yF(x),$$

les projections de ces solutions sur le plan xOy .

Dans le second cas, puisque $rdx + sdy = dp$, l'équation (6) est aussi vérifiée : donc les intersections du plan $x - a = 0$ avec les cylindres $z = f(y)$ parallèles à Ox sont de nouvelles solutions singulières. En écartant ces deux systèmes et divisant par p , on a

$$(7) \quad (rdx + sdy)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (sdx + tdy)\frac{x-a}{a^2}y = 0$$

ou bien, sous forme abrégée,

$$\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dp - \frac{(x-a)y}{a^2}dq = 0.$$

Si, dans cette équation, on suppose z remplacé par sa valeur en fonction de x et de y tirée de l'équation générale de la surface S

$$F\left[\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \frac{y}{z}\right] = 0,$$

il reste une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme

$$Mdx + Ndy = 0.$$

L'intégration de cette équation fait connaître la projection de la courbe cherchée sur le plan xOy . Cette intégration n'est possible qu'autant qu'on particularisera la forme de la fonction F .

Application. — Je considère en particulier, parmi les surfaces S , les ellipsoïdes homothétiques au proposé,

et ayant A pour centre,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h.$$

Dans ces surfaces, on a

$$\frac{x-a}{a^2} + \frac{z}{c^2} p = 0, \quad p = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x-a}{z},$$

$$\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} q = 0, \quad q = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z},$$

$$r = \frac{dp}{dx} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{z - (x-a)p}{z^2} = -\frac{c^4}{a^2 z^3} \left[\frac{z^2}{c^2} + \frac{(x-a)^2}{a^2} \right],$$

$$s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = -\frac{c^2}{a^2} (x-a) \frac{q}{z^2} = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} (x-a)y,$$

$$t = \frac{dq}{dy} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{z - qy}{z^2} = -\frac{c^4}{b^2 z^3} \left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation différentielle (7), mise sous la forme

$$(7') \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[r \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - s \frac{x-a}{a^2} y \right] dx \\ & + \left[s \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - t \frac{x-a}{a^2} y \right] dy = 0; \end{aligned} \right.$$

celle-ci devient

$$\frac{z^2}{a^2 c^2} \left[\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$dx = 0, \quad x = \text{const.}$$

Les courbes cherchées sont donc les intersections des ellipsoïdes homothétiques

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h$$

par des plans parallèles au plan yO_z .

Ce résultat est facile à démontrer géométriquement. En effet, soient M un point quelconque de la surface S et AMC la section de cet ellipsoïde S par le plan AMB ; la tangente MS à la courbe cherchée au point M , devant être conjuguée de la tangente MT à la conique AMC et étant d'ailleurs conjuguée du rayon AM , est conjuguée au plan ATM , et, par suite, parallèle au diamètre conjugué de ce plan; elle est donc située dans le plan diamétral conjugué de AB , qui est parallèle à γOz , et par conséquent est elle-même parallèle au plan γOz . La courbe cherchée est donc plane et consiste en l'intersection de l'ellipsoïde S par un plan quelconque parallèle au plan $zO\gamma$.