NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G.-A. ORLOW

Sur la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ de Didon

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 481-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__481_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA FONCTION GÉNÉRATRICE DES POLYNOMES $P_{m,n}$ DE DIDON;

PAR M. G.-A. ORLOW,

Professeur à l'Institut des voies de communication, et à l'École de construction de Saint-Pétersbourg.

Dans la Note sous le titre : *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 749), Didon considère des fonctions remarquables qu'il désigne par $P_{m,n}$, et dont il donne l'expression générale sous la forme

$$P_{m,n} = K_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^m}{dx^m}.$$

Le coefficient $K_{m,n}$ désignant une constante et m, n des entiers positifs, la fonction $P_{m,n}$ représente un polynôme de degré $m+n$, dans lequel l'exposant de x ne surpasse pas m; en donnant à m et à n toutes les valeurs entières et positives possibles, on obtiendra une série indéfinie de polynômes de cette forme.

Didon montre que l'intégrale

$$\int\int P_{m,n} P_{m',n'} \, dx \, dy,$$

étendue sur la surface du cercle $x^2+y^2=1$, se réduit à zéro, à moins qu'on n'ait $m=m'$, $n=n'$; il trouve pour l'intégrale $\int\int P_{m,n}^2 \, dx\, dy$ l'expression suivante

$$K_{m,n}^2 \frac{2\pi}{2m+1} 2^{2m} m!\, m!\, n! \times \frac{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}{2.4.6\ldots(2m+2n+2)} (2m+n+2)\ldots(2m+2n+1).$$

En posant

$$K_{m,n} = \frac{1}{m!\,n!\,2^{n+2m}},$$

il la réduit à la forme

$$\frac{2\pi}{2m+1}\,\frac{(2m+n+2)(2m+n+3)\ldots(2m+2n+1)}{n!\,2^{2m+2n}} \times \frac{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}{2.4.6\ldots(2m+2n+2)},$$

et trouve, pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$, c'est-à-dire pour la somme $\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n P_{m,n}$, l'expression

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} (1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \quad\times\left[1-ax-by-\dfrac{(a^2+b^2)(y^2-1)}{2(1-by+\sqrt{1-2by+b^2})}\right]^{-\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

Au moyen des propriétés précédentes, il déduit l'expression du coefficient $A_{m,n}$ dans la série de la forme

$$f(x,y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}.$$

Les fonctions $P_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, et en particulier elles permettent de réaliser un certain mode d'approximation des fonctions quelconques de deux variables, au moyen de polynômes entiers, par rapport à ces mêmes variables. Les propriétés des polynômes $P_{m,n}$ sont exposées par Didon dans le Mémoire intitulé *Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables* (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, p. 247).

Considérons les résultats cités plus haut.

L'expression de l'intégrale $\int\int P_{m,n}^2 dx\,dy$ et celle de la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ dépendent du facteur constant $K_{m,n}$, dont un choix convenable permet de les simplifier. Si, au lieu de l'expression employée par Didon pour ce facteur, on pose

$$(2)\quad K_{m,n} = \frac{2^n\ m(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{m!\,n!(2m+n+2)(2m+n+3)\ldots(2m+2n+1)},$$

on aura, comme il est aisé de le voir, pour l'intégrale $\int\int P_{m,n}^2 dx\,dy$, l'expression

$$\frac{\pi}{m+n+1} \times \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}\ \frac{(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+n+1)}{m!\,n!},$$

plus simple que celle citée plus haut. Par conséquent, en effectuant le développement d'une fonction quelconque de deux variables en série ordonnée suivant les polynômes $P_{m,n}$, on obtient pour le coefficient du terme général une expression plus simple et plus commode pour les applications que celle donnée par Didon.

Pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ nous aurons, comme on va voir, l'expression

$$(3)\quad [(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\frac{1}{2}},$$

beaucoup plus simple que celle de Didon; elle est encore remarquable en ce qu'elle peut être généralisée.

Donnant à cette expression la forme

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2-\frac{a^2(y^2-1)}{1-2by+b^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

et introduisant dans l'exposant du second facteur un paramètre arbitraire β, on forme une nouvelle expression

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2-\frac{a^2(y^2-1)}{1-2by+b^2}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}$$

ou bien

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}(1-2by+b^2)^{\beta}[(1-2ax-2by+b^2)\\ \qquad\times(1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)},\end{array}\right.$$

qui est à son tour la fonction génératrice des fonctions plus générales que je désignerai par $\Omega_{m,n}(x, y, \beta)$ et qui se présentent sous la forme

$$\Omega_{m,n} = C_{m,n}\,\frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}}\,\frac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}$$

$$\times\,\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}}\,\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m},$$

$C_{m,n}$ y désignant une constante. Ces nouvelles fonctions $\Omega_{m,n}$ sont aussi des polynômes entiers de degré $m+n$, dans lesquels l'exposant de x ne surpasse pas m, et le terme en $x^m y^n$ est le suivant :

$$2^n\,\frac{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2m-1)}{m!}$$

$$\times\,\frac{(\beta+m+1)(\beta+m+2)\ldots(\beta+m+n)}{n!}\,x^m y^n.$$

Les polynômes $P_{m,n}$ ne sont qu'un cas particulier de ces nouvelles fonctions $\Omega_{m,n}$, qui correspond à $\beta = 0$.

Les polynômes $\Omega_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions connues

$$\varpi_l(x, \alpha) = c_l\,\frac{1}{(x^2-1)^{\alpha}}\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

où c_l désigne une constante, α un paramètre arbitraire, l un nombre entier et positif. On sait que les fonctions ϖ_l admettent une fonction génératrice très simple

$$(1-2ax+a^2)^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)},$$

si l'on pose

$$c_l = \frac{1}{l!}\,\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2l-1)}{(2\alpha+l+1)(2\alpha+l+2)\ldots(2\alpha+2l)}.$$

Mais, en posant $c_l = \frac{1}{l!2^l}$, nous trouverons pour la fonction génératrice des mêmes polynômes une autre expression

$$2^\alpha(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-ax+\sqrt{1-2ax+a^2}\right)^{-\alpha},$$

moins simple que la précédente. On obtient facilement cette dernière expression au moyen de la formule de Lagrange

$$f'\frac{dz}{dx} = \sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{l!}\frac{d^l}{dx^l}\left\{f'(x)\left[\varphi(x)\right]^l\right\},$$

où z est une fonction de a et de x déterminée par l'équation

$$z = x + a\,\varphi(z).$$

Pour cela, on n'a qu'à poser dans cette formule

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(x^2-1),\quad f'(x) = (x^2-1)^\alpha.$$

En ayant égard à deux expressions précédentes pour la fonction génératrice des polynômes ϖ_l, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{l!\,2^l}\,\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} \\ \qquad = 2^\alpha(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-ax+\sqrt{1-2ax+a^2}\right)^{-\alpha}, \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{l!}\,\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2l-1)}{(2\alpha+l+1)(2\alpha+l+2)\ldots(2\alpha+2l)} \\ \qquad \times\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} = (1-2ax+a^2)^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}. \end{cases}$$

D'après chacune d'elles, on peut déterminer la fonction génératrice pour les polynômes $P_{m,n}$ et $\Omega_{m,n}$.

Pour obtenir celle des polynômes $P_{m,n}$, Didon emploie deux fois la formule de Lagrange. Sa méthode peut être encore appliquée au calcul de la fonction génératrice des polynômes $\Omega_{m,n}$, c'est-à-dire à la somme

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n \Omega_{m,n}.$$

Nous abrégerons encore le calcul si au lieu de la formule de Lagrange nous employons immédiatement la première des formules (5); suivant la marche indiquée par Didon, nous trouverons pour la fonction génératrice cherchée l'expression qui, dans le cas $\beta = 0$, se réduit à l'expression (1) ou, ce qui revient au même, à

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-ax-by\,\frac{a^2+b^2}{2b^2}\left(1-by-\sqrt{1-by+b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, dans le cas général, on obtient une expression très compliquée et de peu d'intérêt.

Au contraire, en calculant la fonction génératrice des polynômes $\Omega_{m,n}$ d'après la seconde des formules (5), on aura l'expression (4) très simple citée ci-dessus. A cet effet, il faut prendre pour $C_{m,n}$ la quantité

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2^{n-m}}{m!\,n!}\,\dfrac{(2\beta+1)(2\beta+2)\ldots(2\beta+m)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)} \\ \qquad \times \dfrac{(\beta+m+1)\ldots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)\ldots(2\beta+2m+2n+1)}, \end{array}\right.$$

qu'on peut encore présenter comme il suit :

$$\frac{2^n}{m!\,n!}\,\frac{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2m-1)\,\Gamma(\beta+m+n+1)}{\Gamma(\beta+m+1)} \times \frac{\Gamma(2\beta+m+1)\,\Gamma(2\beta+2m+n+2)}{\Gamma(2\beta+2m+1)\,\Gamma(2\beta+2m+2n+2)};$$

et, en supposant d'abord m constant, il faut déterminer la somme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n}{n!} \frac{2^n(\beta+m+1)\dots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)\dots(2\beta+2m+2n+1)} \times \frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

La seconde des formules (5) donne immédiatement l'expression simple

$$(1-2by+b^2)^{-(\beta+m+1)};$$

en posant dans cette formule $\alpha = \beta+m+\frac{1}{2}$, et en remplaçant les lettres x, a, l respectivement par y, b, n.

On n'a qu'à transformer l'expression

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{m!\,2^m} \left(\frac{a}{1-2by+b^2}\right)^m \frac{(2\beta+1)\dots(2\beta+m)}{(\beta+1)\dots(\beta+m)} \times \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}} \frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m},$$

et la multiplier par le facteur $(1-2by+b^2)^{-(\beta+1)}$ pour avoir la fonction génératrice demandée. Pour transformer cette dernière somme, au moyen de la seconde des formules (5), nous remarquons d'abord qu'en changeant x en $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$, faisant $a = a'\sqrt{1-y^2}$ et ayant de plus égard à l'égalité

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\dots(2\alpha+2l-1)}{(2\alpha+l+1)(2\alpha+l+2)\dots(2\alpha+2l)} = \frac{1}{2^l} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\dots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+l)},$$

cette formule deviendra

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a'^l}{l!\,2^l} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+l)} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\alpha}$$

$$\times \frac{d^l (x^2+y^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} = [1-2a'x-a'^2(y^2-1)]^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}.$$

En supposant ici

$$a' = \frac{a}{1-2by+b^2},$$

et en changeant les lettres l et α respectivement en m et β, nous aurons pour la somme cherchée l'expression

$$(1-2by+b^2)^{2\beta+1}[(1-2ax-2by+b^2) \times (1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}.$$

En la multipliant par $(1-2by+b^2)^{-(\beta+1)}$, nous obtiendrons enfin l'expression de la fonction génératrice demandée (4), que l'on peut présenter encore comme il suit :

$$(1-2by+b^2)^{\beta}[(1-2ax-2by+a^2+b^2) \times (1-2by+b^2)-a^2(y-b)^2]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}.$$

En posant, dans les formules (6) et (4), $\beta = 0$, nous obtiendrons les formules (2) et (3).

Donc les polynômes $\Omega_{m,n}$ peuvent être définis par l'égalité

$$(1-2by+b^2)^{\beta}[(1-2ax-2by+b^2) \times (1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} = \Sigma a^m b^n \Omega_{m,n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de m et n depuis 0 jusqu'à l'infini. Voici quelques-uns de

ces polynômes dans les cas les plus simples :

$$\Omega_{0,0} = 1,$$
$$\Omega_{1,0} = (2\beta+1)x,$$
$$\Omega_{0,1} = 2(\beta+1)y,$$
$$\Omega_{2,0} = \frac{2\beta+1}{2}[(2\beta+3)x^2+y^2-1],$$
$$\Omega_{1,1} = 2(2\beta+1)(\beta+2)xy,$$
$$\Omega_{0,2} = (\beta+1)[2(\beta+2)y^2-1],$$
$$\Omega_{3,0} = \frac{(2\beta+1)(2\beta+3)}{2.3}[(2\beta+5)x^3+3xy^2-3x],$$
$$\Omega_{2,1} = (\beta+3)(2\beta+1)[(2\beta+3)x^2y+y^3-y],$$
$$\Omega_{1,2} = (\beta+2)(2\beta+1[2(\beta+3)xy^2-x],$$
$$\Omega_{0,3} = \tfrac{2}{3}(\beta+1)(\beta+2)[2(\beta+3)y^3-3y],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces polynômes, ayant la fonction génératrice spéciale, ont des propriétés complètement analogues à celles des polynômes ϖ_l. Je ferai voir, dans une autre occasion, quelques-unes de ces propriétés.