

A. GENEIX-MARTIN

Solutions de quelques questions posées aux examens d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 459-464

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__459_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

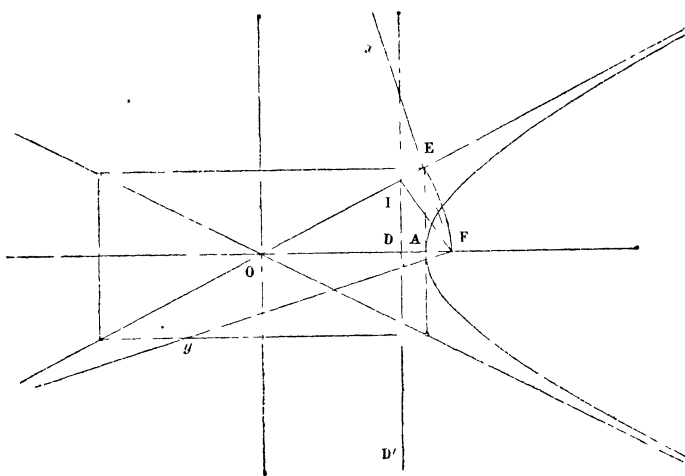
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUELQUES QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS
D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ;**

PAR M. L'ABBÉ A. GENEIX-MARTIN.

1. Equation générale des hyperboles ayant un point donné pour foyer, et telles qu'un des sommets du rectangle construit sur les axes soit en un point donné.

Prenons le foyer fixe F pour pôle, le point fixe E étant



le sommet du rectangle construit sur les axes, prenons FE

pour axe polaire. L'équation de la courbe sera de la forme

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x \cos \omega + y \sin \omega - d)^2.$$

Il faut déterminer ε et d .

Nous savons qu'on obtient le foyer en décrivant de O comme centre un arc de rayon OE; donc le triangle EOF est isocèle : la directrice est IDD', on sait la construire.

On a

$$\widehat{FEO} = \widehat{EFO} = \omega.$$

Soit

$$EF = l,$$

on a

$$l = 2c \cos \omega,$$

d'où

$$c = \frac{l}{2 \cos \omega}.$$

On a aussi

$$IF = b = l \sin \omega; \quad OI = a = -c \cos 2\omega = -\frac{l \cos 2\omega}{2 \cos \omega};$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\cos 2\omega}, \quad FD = d = \frac{b^2}{c} = 2l \sin^2 \omega \cos \omega.$$

L'équation générale demandée est donc

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\omega} (x \cos \omega + y \sin \omega - 2l \sin^2 \omega \cos \omega)^2.$$

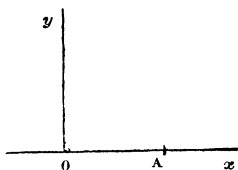
II. *Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre fixe O, et passant par un point fixe A.*

Prenons OA pour axe des x , et une perpendiculaire en O à OA pour axe des y ; posons OA = a . Soit (α, β)

un foyer. L'équation des hyperboles considérées est de la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2(x \cos \omega + y \sin \omega - d)^2.$$

Elle renferme deux paramètres arbitraires ω et d .



L'origine étant au centre, les coefficients des termes du premier degré doivent être nuls, ce qui donne

$$(1) \quad \alpha = 2d \cos \omega, \quad \beta = 2d \sin \omega,$$

d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4d^2, \quad d = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}, \quad \cos \omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Exprimons que la courbe passe par le point A

$$(x = a, \quad y = 0),$$

il vient, en tenant compte de la première des relations (1),

$$a^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 2(a^2 \cos^2 \omega + d^2).$$

Remplaçons dans cette relation $\cos \omega$ et d par les valeurs que nous venons de trouver, il vient pour l'équation du lieu

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une lemniscate qui a pour foyers le

point A et son symétrique par rapport à l'origine. Le point double est O.

III. *Lieu des foyers des ellipses ayant un sommet donné à une extrémité du petit axe, et une tangente donnée à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux.*

IT, tangente fixe à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux; B, sommet fixe sur l'axe non focal. Il est facile de démontrer que la tangente IT est parallèle à la droite AB, qui joint les extrémités des axes de l'ellipse considérée parmi celles qui satisfont à la question.

On démontre aussi facilement que l'ordonnée à l'origine OT de cette tangente est égale à $OB\sqrt{2}$ ou $b\sqrt{2}$.

Soient OL la distance du centre à la droite BA, et BL' la distance de B à la tangente IT, on a

$$\frac{OL}{BL'} = \frac{OB}{BT} = \frac{OB}{OT - OB} = \frac{b}{b(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

d'où

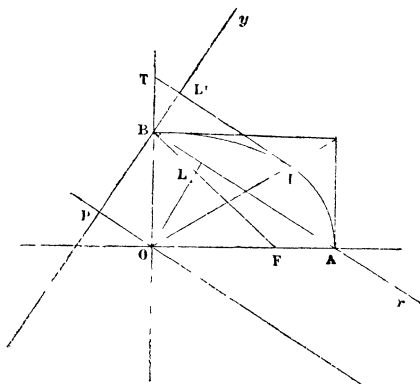
$$OL = \frac{BL'}{\sqrt{2} - 1}.$$

Ainsi, étant donnés le sommet fixe B et la tangente fixe IT; δ étant la distance BL' de B à IT, le centre de l'ellipse est sur une parallèle à IT, distante de B de la quantité $\frac{\delta}{\sqrt{2} - 1}$, et par suite distante de IT de la quan-

tité $\delta + \frac{\delta}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$.

Soit F le foyer dans la position considérée de l'ellipse, on a $BF = OA$. Nous allons chercher le lieu des foyers.

Prenons BA pour axe des x , et une perpendiculaire en B pour axe des y . Prenons $BP = \beta \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right)$; par le point P



menons une parallèle à l'axe des x ; elle passe par le centre O. Soit $y = \beta$ l'équation de la droite PO.

Menons de l'origine la droite BO ($y = mx$); les coordonnées du point O sont $y = \beta$, $x = \frac{\beta}{m}$. L'équation de la droite OF, perpendiculaire à OB, est

$$m^2(y - \beta) + mx - \beta = 0.$$

L'abscisse du point A où elle rencontre l'axe des x est $x = \frac{(m^2 + 1)\beta}{m}$. Donc

$$\overline{OA}^2 = \beta^2(1 + m^2).$$

Puisque $BF = OA$, décrivons de l'origine comme centre le cercle de rayon $\beta\sqrt{1+m^2}$. Son équation est

$$(1) \quad x^2 + y^2 = \beta^2(1 + m^2).$$

Les foyers sont, à l'intersection de ce cercle et de la droite OA,

$$(2) \quad m^2(\gamma - \beta) + mx - \beta = 0.$$

Nous obtiendrons le lieu cherché en éliminant m entre (1) et (2).

On sait que l'élimination de Z entre les deux équations

$$aZ^2 + bZ + c = 0, \quad a'Z^2 + b'Z + c' = 0$$

donne pour résultat

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb').$$

Appliquons aux équations (1) et (2) du second degré en m , il vient

$$[(\beta - \gamma)(x^2 + y^2 - \beta^2) + \beta^3]^2 = x\beta^2 x^2 (x^2 + y^2 - \beta^2).$$

En développant, réduisant et supprimant le facteur $(x^2 + y^2)$, on trouve pour l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2 - \beta^2)\gamma(\gamma - 2\beta) + \beta^4 = 0.$$

Cette courbe a deux asymptotes, l'axe des x et une parallèle à l'axe des x , dont l'équation est $y = 2\beta$. Du reste, la courbe est comprise tout entière entre ces deux asymptotes, car il est facile de vérifier qu'elle ne les rencontre pas à distance finie.