NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 425-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__425_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1335

(voir 2e série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. MARCELLO ROCCHETTI.

Démontrer :

1° *Que les solutions entières et positives de l'équation* $24x^2+1=y^2$, *dont les deux premières sont* $x=0$ *et* $y=1$; $x=1$ *et* $y=5$, *se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de* x *ou de* y *de dix fois la dernière pour obtenir la suivante;*

2° *Que les solutions entières et positives de l'équation* $2x^2+1=3y^2$, *dont les deux premières sont* $x=1$ *et* $y=1$; $x=11$ *et* $y=9$, *s'obtiennent comme celles de l'équation précédente* (1°);

3° *Que toute valeur du nombre* $X=3x^2+2$ (2°) *ayant la double propriété d'être égale à la somme des carrés de trois entiers consécutifs et à celle des carrés de deux entiers consécutifs est de la forme* $360n+5$.

(LIONNET.)

1° Si (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., (α_n, β_n) sont les n premières solutions de l'équation $24x^2+1=y^2$, déduites chacune des deux précédentes de la manière indiquée, la loi énoncée sera vraie, en général, si l'on démontre que

$$24\alpha_{n+1}^2+1=\beta_{n+1}^2, \tag{1}$$

où

$$\alpha_{n+1}=10\alpha_n-\alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1}=10\beta_n-\beta_{n-1}. \tag{2}$$

Substituons les valeurs (2) dans l'équation (1); celle-ci est vérifiée si

$$24\alpha_n\alpha_{n-1} = \beta_n\beta_{n-1} - 5,$$

relation qui devient

$$24\alpha_2\alpha_1 = \beta_2\beta_1 - 5.$$

Mais cette dernière équation est satisfaite en faisant

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 5;$$

donc, etc.

2° On doit démontrer semblablement que

$$2\alpha_n\alpha_{n-1} = 3\beta_n\beta_{n-1} - 5,$$

relation qui devient

$$2\alpha_2\alpha_1 = 3\beta_2\beta_1 - 5.$$

Mais cette équation est satisfaite en faisant

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 11, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 9;$$

donc, etc.

Remarque. — Pour les valeurs de

$$x = 1, \ 11, \ 109, \ 1079, \ \ldots,$$

x^2 est de la forme $120n+1$, et, par conséquent, $3x^2+2$ est de la forme $360n+5$.

3° L'équation

$$2z^2 + 2z + 1 = 3x^2 + 1$$

donne

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{6x^2+3}}{2}.$$

On aura pour z des valeurs entières et positives quand $+\sqrt{6x^2+3}$ sera un nombre entier nécessairement divisible par 3. Donc toute valeur de x entière et positive

qui vérifie la relation $2x^2+1=3y^2$, où y est un nombre entier, donne une valeur de z entière et positive.

Mais les solutions indiquées ont été déterminées (2^o); elles sont

Pour x..... 1, 11, 109, 1079, ...,
Pour y..... 1, 9, 89, 881, ...;

donc nous avons

Pour $z=\frac{3y-1}{2}$..... 1, 13, 133, 1321, ...

Exemple :

Pour $x=1$..... $N=0+1^2+2^2=1^2+2^2$,
Pour $x=11$..... $N=10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$,
Pour $x=109$.... $N=108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$,
.....

Note. — La même question a été résolue par MM. F. Pisani; J. Lissençon; Moret-Blanc; A. Leinekugel.

Question 1345

(voir 2e série, t. XIX, p. 432).

PAR M. N. GOFFART.

Démontrer que toute droite passant par le sommet commun aux trois coniques représentées par les équations

$$y^2-2px=0,$$
$$2px^2+\alpha(y^2-2px)=0,$$
$$2px^2-\alpha(y^2-2px)=0$$

les coupe en trois autres points qui forment avec le sommet une proportion harmonique, quelle que soit la valeur de α. (ÉD. GUILLET.)

Soit une droite quelconque $y = mx$, passant au sommet. Elle coupe respectivement les trois coniques aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), et l'on a, par conséquent,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{m^2}{2p},$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{m^2}{p},$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-\alpha} + \frac{m^2}{p}.$$

Donc

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{x_1},$$

relation indépendante de α et qui démontre la proposition.

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Lez; Moret-Blanc; F. Pisani; J. Boudènes et J. Perret, élèves du lycée de Grenoble; A. Droz, au Gymnase cantonal de Porrentruy (Berne); E. Pecquery, élève du lycée du Havre; H. Herzog, du lycée de Rouen.

Question 1347

(voir 2e série, t. XIX, p. 432);

PAR M. N. GOFFART.

Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés on obtienne un faisceau en involution se compose de quinze cubiques du troisième ordre qui passent toutes par les six points donnés. (DEWULF.)

Soient

A et A′, B et B′, C et C′

les points donnés, et leurs coordonnées respectives

x_1, y_1 et x'_1, y'_1, x_2, y_2 et x'_2, y'_2, x_3, y_3 et x'_3, y'_3.

Soit $M(x,y)$ le point mobile; prenons pour axe des x une droite OX quelconque, coupant les droites MA, MA', MB, ..., aux points

$$a \text{ et } a', \quad b \text{ et } b', \quad c \text{ et } c',$$

dont les distances respectives à l'origine sont

$$\alpha \text{ et } \alpha', \quad \beta \text{ et } \beta', \quad \gamma \text{ et } \gamma'.$$

Nous exprimerons que le faisceau est en involution en écrivant l'équation symétrique

$$ab'.bc'.ca' + a'b.b'c.c'a = 0$$

ou

$$(\alpha - \beta')(\beta - \gamma')(\gamma - \alpha') + (\alpha' - \beta)(\beta' - \gamma)(\gamma' - \alpha) = 0.$$

Exprimons en fonction des coordonnées toutes ces différences. Remarquons que la droite MAa, par exemple, a pour équation

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - \alpha}{y_1},$$

d'où

$$\alpha = \frac{x_1 y - x y_1}{y - y_1}.$$

Par analogie, on a

$$\alpha = \frac{x_1 y - x y_1}{y - y_1}, \quad \alpha' = \frac{x'_1 y - x y'_1}{y - y'_1},$$
$$\beta = \frac{x_2 y - x y_2}{y - y_2}, \quad \beta' = \frac{x'_2 y - x y'_2}{y - y'_2},$$
$$\gamma = \frac{x_3 y - x y_3}{y - y_3}, \quad \gamma' = \frac{x'_3 y - x y'_3}{y - y'_3}.$$

Formons maintenant les différences qui composent le produit; nous aurons, par exemple,

$$\alpha - \beta' = \frac{y[(x_1 y - x y_1) - (x'_2 y - x y'_2) + (x'_2 y_1 - x_1 y'_2)]}{(y - y_1)(y - y'_2)}$$

ou encore

$$\alpha - \beta' = \frac{\gamma \begin{vmatrix} 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{(y - y_1)(y - y'_2)}.$$

On formerait de même les autres différences, et l'on aurait, après substitution et réduction,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x'_1 & y'_1 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x'_1 & y'_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x'_3 & y'_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de cette courbe est, comme on le voit, du troisième degré, et l'on remarque que, si l'on substitue à x et y les coordonnées de l'un des points donnés, x_1, y_1 par exemple, un déterminant facteur s'annule dans chaque produit, ce qui revient à dire que la courbe passe par les six points donnés.

L'ordre des lettres $a, a', b, \ldots$ étant posé comme tout à l'heure, on peut admettre que les droites MA, MA', ... soient prises dans un ordre différent pour produire la suite $a, a', b, \ldots$. Dès lors, on produira autant de courbes analogues à la précédente qu'on pourra former de faisceaux, tels que M(ABCC'), produisant l'involution $(aa'bb'cc')$, c'est-à-dire autant de courbes que de combinaisons de six objets quatre à quatre, soit $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$.

Note. — La même question a été résolue par MM. F. Dumont, chargé de cours au lycée de Tournon, et Moret-Blanc.

Question 1349

(voir 2e série, t. XIX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver un nombre positif ayant la double propriété d'être égal au produit de trois entiers consécutifs et à celui de deux entiers consécutifs. (LIONNET.)

Il faut résoudre en nombres entiers et positifs l'équation indéterminée

$$(1)\qquad \begin{cases} y(y+1)(y+2) = x(x+1), \\ \text{ou} \\ y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x. \end{cases}$$

En multipliant les deux membres par 4, et ajoutant 1, on a

$$(2)\qquad 4y^3 + 12y^2 + 8y + 1 = (2x+1)^2.$$

La question se réduit donc à trouver un nombre entier y, tel que $4y^3 + 12y^2 + 8y + 1$ soit un carré parfait. Posons

$$(3)\qquad 4y^3 + 12y^2 + 8y + 1 = (my - 1)^2,$$

d'où

$$4y^2 + (12 - m^2)y + (2m + 8) = 0;$$

$$y = \frac{m^2 - 12 \pm \sqrt{m^4 - 24m^2 - 32m + 16}}{8}.$$

Il faut que $m^4 - 24m^2 - 32m + 16$ soit le carré d'un multiple de 4; on peut donc poser $m = 2n$, et, en divisant par 16 l'expression qui doit être un carré, on a

$$n^4 - 6n^2 - 4n + 1,$$

qui doit être un carré.

On voit immédiatement que cette condition est satis-

faite par $n = 3$, d'où $m = 6$ et $y = \frac{24 \pm 16}{8}$, ce qui donne les deux solutions $y = 1$ et $y = 5$, ou

$$1.2.3 = 2.3 = 6,$$
$$5.6.7 = 14.15 = 210.$$

Les nombres 6 et 210 jouissent donc de la propriété énoncée (1).

---

(1) *Note du Rédacteur.* — D'après les équations (2) et (3) on a

$$2x + 1 = my - 1,$$
$$x + 1 = \frac{m}{2} y;$$

donc, si m est effectivement un nombre pair $2n$, $x + 1 = ny$, c'est-à-dire que $x + 1$ est multiple de y. En admettant *a priori* cette hypothèse, un calcul très simple fait connaître les solutions de la question proposée.

En remplaçant $x + 1$ par ny, l'équation (1) devient

$$y^2 - (n^2 - 3)y + n + 2 = 0.$$

Le nombre entier n ne peut être moindre que 3, car, pour $n = 1$ et $n = 2$, les racines de l'équation précédente sont imaginaires.

Le nombre n ne peut surpasser 3. En effet, si l'on remplace successivement y par $n^2 - 3$ et $n^2 - 4$, le premier membre de l'équation

$$y^2 - (n^2 - 3)y + n + 2 = 0$$

prend les valeurs

$$n + 2 \quad \text{et} \quad -n^2 + n + 6 = (3 - n)(n + 2);$$

la première est évidemment positive, et l'autre est négative quand n surpasse 3. Dans ce cas, l'équation a une racine comprise entre les deux entiers consécutifs $n - 4$, $n - 3$; l'autre racine est comprise entre 0 et 1, comme il est facile de le voir, en ayant égard à ce que la somme des deux racines est $n^2 - 3$. Par conséquent, aucune des deux racines n'est égale à un nombre entier.

Il faut donc que $n = 3$; il en résulte

$$y^2 - 6y + 5 = 0, \quad y = 1 \quad \text{et} \quad y = 5,$$

d'où

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = 14.$$

Ce sont les deux solutions trouvées par M. Moret-Blanc.

(G.)