

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 423-424

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__423_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Lettre adressée à M. Brisse.

Monsieur et cher collègue,

Voici, au sujet de la question 1357, posée par M. Barbarin, dans ce Tome, page 48, et résolue par M. Aignan, page 282, quelques remarques que vous jugerez peut-être dignes d'intérêt.

La propriété qui définit le lieu géométrique est projective, et, puisque tout triangle peut être considéré comme la projection d'un triangle équilatéral, il suffit de considérer le cas où le triangle est équilatéral.

Prenant ce triangle comme triangle de référence, on trouve comme équation du lieu

$$(1) \quad xyz = k(x+y)(y+z)(z+x).$$

Cette équation permet de reconnaître sans peine toutes les propriétés indiquées par M. Aignan. J'ajouterai la suivante: pour $k = -1$, la cubique se décompose en une droite à l'infini et une circonférence circonscrite au triangle de référence.

Il en résulte ces deux théorèmes de Géométrie, dont la démonstration directe est sans difficulté :

THÉORÈME. — *On joint les sommets d'un triangle équilatéral à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments : le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des côtés du triangle est la circonférence circonscrite au triangle.*

THÉORÈME. — *Par les sommets d'un triangle quelconque, on mène trois parallèles qui interceptent sur les côtés du triangle six segments : le produit de trois segments non consécutifs est toujours égal au produit des côtés du triangle.*

Les cubiques (1) sont des courbes à trois axes de symétrie. L'équation générale des cubiques à trois axes de symétrie est, en prenant un triangle de référence dont les côtés soient perpendiculaires aux axes de symétrie,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} m(x + y + z)^3 \\ \quad + n(x + y + z)(xy + yz + zx) + pxyz = 0. \end{array} \right.$$

On peut toujours disposer du triangle de référence de manière à faire disparaître un des termes de cette équation. Si l'on fait disparaître le premier, on retombe sur l'équation (1). Donc les cubiques (1) comprennent toutes les cubiques à trois axes de symétrie. Si l'on fait disparaître le second terme, l'équation (2) devient

$$(3) \quad xyz = k(x + y + z)^3.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Les cubiques à trois axes de symétrie sont telles que le produit des distances d'un de leurs points aux trois côtés d'un triangle équilatéral est constant.*

Remarquons, en terminant, que l'équation (3) ne contient pas de cubique décomposable : elle ne se déduit de l'équation (2) que si p n'est pas nul, et de l'équation (1) que si k n'est pas égal à -1 .

LUCIEN LÉVY,

Professeur au lycée Louis-le-Grand.