

C. HENRY

**Décomposition des nombres $f^{12} - 9g^{12}$
et du double de ces nombres en deux
cubes rationnels**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 418-420

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__418_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉCOMPOSITION DES NOMBRES $f^{12} - 9g^{12}$ ET DU DOUBLE
DE CES NOMBRES EN DEUX CUBES RATIONNELS ;**

PAR M. C. HENRY.

On doit à M. Édouard Lucas ces deux identités (1)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 \\ \quad + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 = 2^2 \cdot 3^2 LM (L^2 + 3M^2)^2, \end{cases} \\
 (2) \quad & (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L (L^2 + 3M^2),
 \end{aligned}$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XIX, p. 91.

d'où l'on tire aisément, par des substitutions convenables, ce théorème (1) :

Le quadruple et le carré de $4p^6 + 27q^6$ est décomposable en deux cubes rationnels.

De l'identité (2) on peut déduire également cette autre proposition :

THÉOREME. — *Les nombres de la forme $f^{12} - 9g^{12}$ et leur double sont décomposables en deux cubes rationnels.*

En effet, si dans l'identité (2) on remplace

$$L \text{ par } f^6 (f^{12} - 9g^{12}),$$

$$M \text{ par } 3g^6 (f^{12} - 9g^{12}),$$

on a facilement

$$L^2 + 3M^2 = (f^{12} + 3g^{12})^3,$$

et, en posant

$$A = f^{12} - 9g^{12},$$

il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{A f^3 + 3g^6 (f^{12} - 9g^{12})}{f^2 (f^{12} + 3g^{12})} \right]^3 \\ & + \left[\frac{A f^6 - 3g^6 (f^{12} - 9g^{12})}{f^2 (f^{12} + 3g^{12})} \right]^3 = A. \end{aligned} \right.$$

Si, dans la même identité (2), on fait

$$L = 4f^3 g^3 (f^6 - 9g^6),$$

$$M = f^{12} - 18f^6 g^6 + 9g^{12},$$

on a

$$(4) \quad \left[\frac{L + M}{2fg(f^6 + 3g^6)} \right]^3 + \left[\frac{L - M}{2fg(f^6 + 3g^6)} \right]^3 = A.$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XIX, p. 430.

Donc les nombres de la forme $f^{12} - 9g^{12}$ et leur double sont des sommes de deux cubes rationnels.

Les nombres f et g sont évidemment supposés inégaux.