

E. FAUQUEMBERGUE

Question de licence (Paris, juillet 1880)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 416-418

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__416_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880) ;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

En un point M de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(1) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre T avec OX, puis on fait tourner la figure autour de OX.

Exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette AM, A étant le sommet de la courbe et

par la tangente MT : 1° en fonction de l'abscisse de M,
2° en fonction de l'abscisse de T.

Soient x, y les coordonnées du point M. La tangente MT engendrera la surface latérale d'un cône : $\pi y \times MT$.
Calculons d'abord MT. L'équation (1) donne

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

par suite, l'équation de la tangente au point M est

$$Y - y = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) (X - x).$$

En y faisant $Y = 0$, on aura l'abscisse du point T

$$(3) \quad X = x - a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = x - \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}.$$

On a donc

$$MT^2 = y^2 + \frac{4y^2}{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} = \frac{y^2 \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2}{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2},$$

d'où

$$MT = y \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{2}{a} \frac{y^2}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}};$$

par suite, la surface engendrée par MT a pour expression

$$\text{surf. MT} = \frac{2\pi y^3}{a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)}.$$

D'autre part,

$$\text{surf. AM} = 2\pi \int_0^x y \, ds.$$

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{y \, dx}{a},$$

$$\begin{aligned} \text{surf. AM} &= 2\pi \int_0^x \frac{y^2}{a} dx = \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2 \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{surf. AM} &= \frac{\pi a}{2} \left(\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} + 2x \right) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + \pi a x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{surf. AM} - \text{surf. MT} &= \pi a x - \frac{\pi a y}{2} \left[\frac{4y^2}{a^2 \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)} \right] \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \\ &= \pi a \left[x - \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} \right] = \pi a X. \end{aligned}$$
